Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Matematica
A. A. 2004-05

Tesi di Laurea Specialistica

Coppie di Gelfand

Candidato
Fabio Ferrari Ruffino

Relatore
Prof. Fulvio Ricci

Indice

1 Introduzione **1**

2 Coppie di Gelfand **3**
- 2.1 Richiami sui gruppi topologici 3
- 2.2 Teoria di base delle coppie di Gelfand 5
- 2.3 Funzioni sferiche 8
- 2.4 L'algebra $L^1(G)^\natural$ 11
- 2.5 Spazi omogenei 14

3 Operatori differenziali su gruppi di Lie **19**
- 3.1 Operatori differenziali su varietà 19
- 3.2 L'operatore di Laplace-Beltrami 24
- 3.3 Spazio dei laterali G/K 28
- 3.4 Algebre di operatori differenziali 34
- 3.5 Caratterizzazione di $\mathbb{D}(G)$ e $\mathbb{D}(G/K)$ 39

4 Coppie di Gelfand su gruppi di Lie **55**
- 4.1 Caratterizzazione differenziale delle coppie di Gelfand 55
- 4.2 Caratterizzazione differenziale delle funzioni sferiche 63
- 4.3 Spazi doppiamente transitivi 68

5 Funzioni di tipo positivo **71**
- 5.1 Definizione e principali proprietà 71
- 5.2 Funzioni di tipo positivo e rappresentazioni 74
- 5.3 Funzioni di tipo positivo estremali 78
- 5.4 Funzioni di tipo positivo e forme lineari su $L^1(G)^\natural$ 80

6 Trasformata di Fourier sferica **85**

7 Esempi di Coppie di Gelfand **93**
- 7.1 Spazio Euclideo 93
- 7.2 Le sfere 94
- 7.3 Piani iperbolici 95
- 7.4 Gruppo di Heisenberg 96

Capitolo 1

Introduzione

Scopo di questa tesi è studiare l'analisi di Fourier nell'ambito delle coppie di Gelfand. In particolare, sia G un gruppo localmente compatto e K un sottogruppo compatto. Considero l'insieme delle funzioni $f : G \to \mathbb{C}$ continue a supporto compatto *bi-invarianti per* K, ovvero tali che $f(k_1 x k_2) = f(x)$ $\forall k_1, k_2 \in K$, $\forall x \in G$. Queste funzioni formano un'algebra $C_C(G)^\natural$ rispetto alla convoluzione: se $C_C(G)^\natural$ è commutativa, la coppia (G, K) è detta *coppia di Gelfand*. Similmente si definisce l'algebra di Banach $L^1(G)^\natural$, che è commutativa se e solo se lo è $C_C(G)^\natural$. Dimostro quindi nella tesi alcune proprietà delle coppie di Gelfand e delle funzioni bi-invarianti per K. Una di queste consiste nel fatto che, se (G, K) è una coppia di Gelfand, allora G è unimodulare, ovvero esiste un'unica misura di Haar sia destra che sinistra (unica a meno di un fattore moltiplicativo), e sarà la misura dx rispetto a cui si integreranno tutte le funzioni su G a valori complessi.

Data $\varphi : G \to \mathbb{C}$ continua bi-invariante per K, considero l'applicazione $\chi_\varphi : C_C(G)^\natural \to \mathbb{C}$ pari a:

$$\chi_\varphi(f) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})\,dx$$

φ è detta *sferica* se χ_φ è un carattere di $C_C(G)^\natural$, ovvero se $\chi_\varphi(f * g) = \chi_\varphi(f) \cdot \chi_\varphi(g)$. Le funzioni sferiche sono l'analogo delle funzioni esponenziali $e^{\lambda x}$ nell'analisi armonica euclidea, che può essere pensata come l'analisi armonica sulla coppia di Gelfand $(\mathbb{R}^n, \{0\})$.

Successivamente, descrivo le principali proprietà delle algebre di operatori differenziali su gruppi di Lie, e considero il caso delle coppie di Gelfand in cui G e K sono appunto gruppi di Lie. In tal caso, si può costruire una struttura di varietà analitica sullo spazio dei laterali sinistri G/K: considero allora l'algebra $\mathbb{D}(G/K)$ degli operatori differenziali su G/K invarianti per G-traslazione sinistra. Si dimostra che (G, K) è una coppia di Gelfand se e solo se $\mathbb{D}(G/K)$ è un'algebra commutativa, e che una funzione continua $\varphi : G \to \mathbb{C}$ è sferica se e solo se è C^∞, vale 1 nell'unità di G e la sua proiezione su G/K è autofunzione di tutti gli operatori di $\mathbb{D}(G/K)$.

Si dimostra inoltre che $\mathbb{D}(G/K)$ è finitamente generata e che, fissati dei generatori $I_1, \ldots, I_s$, una funzione sferica è univocamente determinata dalla n-upla degli autovalori $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ rispetto a questi generatori. Le funzioni sferiche possono quindi essere pensate come un sottoinsieme di R^s, su cui si può quindi introdurre la topologia euclidea. Poichè lo spazio delle funzioni sferiche limitate coincide con lo spettro dell'algebra di Banach $L^1(G)^\natural$, su queste si può introdurre anche la topologia di Gelfand: tratterò quindi il problema della eventuale coincidenza di queste due topologie.

Introduco poi il concetto di *traformata di Fourier sferica.* In particolare, se Σ è l'insieme delle funzioni *sferiche limitate* di G e $f \in L^1(G)^\natural$, considero l'applicazione $\hat{f} : \Sigma \to \mathbb{C}$ pari a $\hat{f}(\omega) = \int_G f(x)\omega(x^{-1})\,dx$. Si riprocude in questo modo il concetto usuale di trasformata di Fourier su $\mathbb{R}^n$, pensando $\hat{f} = \hat{f}\big(e^{i(\xi \cdot x)}\big)$ anzichè $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$.

Da questa definizione, si possono ricostruire le formule di inversione e di Plancherel e altre proprietà analoghe a quelle usuali su $\mathbb{R}^n$.

Infine, presento alcuni esempi significativi di Coppie di Gelfand, descrivendo le relative funzioni sferiche e le relative algebre di operatori differenziali $\mathbb{D}(G/K)$.

Capitolo 2

Coppie di Gelfand

2.1 Richiami sui gruppi topologici

Notazione: Siano $(G, \cdot)$ un gruppo, $A, B \subseteq G$ e $g \in G$. Pongo allora:

$$\begin{aligned} gA &= \{ga : a \in A\} \\ Ag &= \{ag : a \in A\} \\ A^{-1} &= \{a^{-1} : a \in A\} \\ AB &= \{ab : a \in A, b \in B\} \end{aligned}$$

Definizione 2.1 Sia $(G, \cdot)$ un gruppo topologico. Una misura μ su G, di Radon e non nulla, è detta *misura di Haar sinistra* se è invariante per traslazione sinistra, ovvero se $\forall A \subseteq G$ misurabile e $\forall g \in G$ si ha che anche gA è misurabile e:

$$\mu(A) = \mu(gA), \ \forall g \in G$$

In maniera ovvia si definisce una *misura di Haar destra.*

Userò in seguito il ben noto teorema (si veda [6], teoremi (2.10) pag. 37 e (2.20) pag. 39):

Teorema 2.1 *Sia $(G, \cdot)$ localmente compatto. Allora esistono una misura di Haar sinistra e una misura di Haar destra su G, uniche a meno di un fattore moltiplicativo.*
Se μ è una misura su G e $\tilde{\mu}$ è definita da:

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$$

si ha che μ è di Haar sinistra se e solo se $\tilde{\mu}$ è di Haar destra. $\square$

Si verifica facilmente che μ è di Haar sinistra se e solo se $\forall f : G \to \mathbb{C}$ misurabile:

$$\int_G f(yx)\, d\mu(x) = \int_G f(x)\, d\mu(x) \quad \forall y \in G$$

Se, per $y \in G$, definisco la misura $\bar{\mu}_y$ come:

$$\bar{\mu}_y(A) = \mu(Ay)$$

si vede che anche $\bar{\mu}_y$ è di Haar sinistra, dunque è un multiplo di μ. Definisco allora la funzione $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$ in questo modo:

$$\bar{\mu}_y = \Delta(y)\mu$$

da cui:

$$\int_G f(xy)\, d\mu(x) = \Delta(y^{-1}) \int_G f(x)\, d\mu(x)$$

Dalla definizione segue che Δ è un omomorfismo continuo da G a $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ (si veda [6], p. 46-47).

Definizione 2.2 G è detto *unimodulare* se Δ è l'omomorfismo banale.

Lemma 2.2 (si veda [6], p. 47) *G è unimodulare se e solo se le sue misure di Haar a sinistra e a destra coincidono.* $\square$

Essendo Δ un omomorfismo continuo, è chiaro che tutti i gruppi compatti sono unimodulari: infatti, $\Delta(G)$ è un sottogruppo compatto di $\mathbb{R}^+$, quindi è il sottogruppo banale $\{1\}$.

In seguito, userò spesso l'espressione "*la* misura di Haar sinistra" di G, intendendo una qualunque misura di Haar sinistra, indipendentemente dal fattore scalare che non ha alcuna rilevanza. Inoltre, negli integrali indicherò la misura di Haar con dx.

Se G è compatto, si lavora di solito con la misura di Haar sinistra *normalizzata*, cioè tale che $\mu(G) = 1$ (una misura di Haar è per definizione di Radon, per cui la misura di un compatto è finita).

Notazione: Sia G un gruppo topologico. Indicherò con $*$ la convoluzione in G, ovvero, per $f, g : G \to \mathbb{C}$ pongo:

$$f * g(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x)\, dx$$

con dx misura di Haar sinistra.

Lemma 2.3 (si veda [6] p. 50) *Se $f, g \in L^1(G)$, allora $f * g \in L^1(G)$ e $\|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$. Se f e g hanno supporto compatto, anche $f * g$ ha supporto compatto e $supp(f * g) \subseteq supp(f) \cdot supp(g)$.* $\square$

2.2 Teoria di base delle coppie di Gelfand

Sia $(G, \cdot)$ un gruppo localmente compatto, e sia dx la sua misura di Haar sinistra. Sia poi $K \leq G$ un sottogruppo *compatto*.

Definizione 2.3 Una funzione $f : G \to \mathbb{C}$ è detta *bi-invariante per* K se:

$$f(k_1 x k_2) = f(x) \quad \forall k_1, k_2 \in K, \forall x \in G$$

Notazione: Indico con $C_C(G)^\natural$ l'insieme delle funzioni $f : G \to \mathbb{C}$ continue a supporto compatto, bi-invarianti per K.
Indico con $L^1(G)^\natural$ l'insieme delle funzioni $f \in L^1(G)$ bi-invarianti per K.

Notazione: Siano $f \in C(G)$ e dk la misura di Haar normalizzata di K. Allora indico con $f^\natural$ la funzione:

$$f^\natural(x) = \iint_{K \times K} f(k_1 x k_2)\, dk_1\, dk_2$$

Lemma 2.4 *Se* $f \in C_C(G)$ *allora* $f^\natural \in C_C(G)^\natural$.

Dimostrazione:

1) $f^\natural$ è bi-invariante per K essendo dk di Haar e K unimodulare (è compatto).

2) è a supporto compatto. Infatti, sia $A = \{x : f^\natural(x) \neq 0\}$. Chiaramente, $f^\natural(x) \neq 0 \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in K : f(k_1 x k_2) \neq 0 \Rightarrow k_1 x k_2 \in \operatorname{supp}(f) \Rightarrow x \in K \cdot \operatorname{supp}(f) \cdot K$. Dunque $A \subseteq K \cdot \operatorname{supp}(f) \cdot K$. L'applicazione $\phi : G \times G \times G \to G$ data da $\phi(x, y, z) = xyz$ è continua (def. di gruppo topologico), e dunque $K \cdot \operatorname{supp}(f) \cdot K = \phi(K \times \operatorname{supp}(f) \times K)$ è compatto. Dunque $\operatorname{supp}(f^\natural) = \overline{A} \subseteq K \cdot \operatorname{supp}(f) \cdot K$ e quindi $\operatorname{supp}(f^\natural)$ è compatto in quanto sottoinsieme chiuso di un compatto.

3) è continua. Infatti, se $x \in G$, scelgo $U(x)$ intorno *compatto* di x e ho che, per continuità di f e del prodotto, la funzione ϕ data da:

$$\phi(k_1, y, k_2) = f(k_1 y k_2)$$

è continua in $K \times U \times K$, e dunque uniformemente continua. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni punto $(k_1, y, k_2) \in K \times U \times K$ scelgo un intorno del tipo $H \times V \times H'$ all'interno del quale ϕ varia in modulo al più ε, ed estraggo una sottocopertura finita: da questa costruisco una partizione di $K \times U \times K$ tale che ciascun suo insieme è contenuto in un intorno della copertura. Siano

$H_1 \times V_1 \times H'_1, \ldots, H_m \times V_m \times H'_m$ gli intorni tali che $x \in V_i$ (dunque $\{H_i \times H'_j\}$ è una partizione di $K \times K$), e sia $V = \bigcap_{i=1}^{m} V_i$. Allora, per $y \in V$:

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_{K\times K} f(k_1 y k_2)\, dk_1\, dk_2 - \iint_{K\times K} f(k_1 y k_2)\, dk_1\, dk_2 \right| \\
&\qquad \leq \iint_{K\times K} \big| f(k_1 y k_2) - f(k_1 x k_2) \big|\, dk_1\, dk_2 \\
&\qquad \leq \sum_{i,j=1}^{m} \iint_{H_i \times H'_j} \big| f(k_1 y k_2) - f(k_1 x k_2) \big|\, dk_1\, dk_2 \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.5 $C_C(G)^\natural$ *è denso in* $L^1(G)^\natural$.

Dimostrazione: Sia $f \in L^1(G)^\natural$. Per densità di $C_C(G)$ in $L^1(G)$, esiste una successione $\{f_n\} \subseteq C_C(G)$ tale che $f_n \xrightarrow{L^1} f$. Dimostro allora che $f_n^\natural \xrightarrow{L^1} f^\natural = f$. Infatti:

$$\begin{aligned}
\int_G \big| f_n^\natural(x) - f^\natural(x) \big|\, dx &= \int_G \left| \iint_{K\times K} \big[f_n(k_1 x k_2) - f(k_1 x k_2) \big]\, dk_1\, dk_2 \right| dx \\
&\leq \int_G \iint_{K\times K} \big| f_n(k_1 x k_2) - f(k_1 x k_2) \big|\, dk_1\, dk_2\, dx \\
&= \iint_{K\times K} \int_G \big| f_n(k_1 x k_2) - f(k_1 x k_2) \big|\, dx\, dk_1\, dk_2 \\
&= \iint_{K\times K} \Delta(k_2)^{-1} \int_G \big| f_n(x) - f(x) \big|\, dx\, dk_1\, dk_2 \\
&= \int_G \big| f_n(x) - f(x) \big|\, dx \to 0
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.6 $C_C(G)^\natural$ *è sottoalgebra di* $C_C(G)$ *rispetto alla convoluzione. Similmente* $L^1(G)^\natural$ *è sottoalgebra di* $L^1(G)$.

Dimostrazione: Siano $f, g \in L^1(G)^\natural$:

$$\begin{aligned}
f * g(k_1 x k_2) &= \int_G f(y) g(y^{-1} k_1 x k_2)\, dy \\
&= \int_G f(y) g(y^{-1} k_1 x)\, dy \\
&= \int_G f(k_1 y) g(y^{-1} x)\, dy \\
&= \int_G f(y) g(y^{-1} x)\, dy = f * g(x)
\end{aligned}$$

□

Definizione 2.4 La coppia (G, K) è detta *coppia di Gelfand* se $C_C(G)^\natural$ è un'algebra commutativa.

Lemma 2.7 *(G, K) è un coppia di Gelfand se e solo se $L^1(G)^\natural$ è un'algebra commutativa.*

Dimostrazione: Segue banalmente dalla densità di $C_C(G)^\natural$ e dalla continuità della convoluzione: se $f, g \in L^1(G)^\natural$, trovo $\{f_n\}, \{g_n\} \subseteq C_C(G)^\natural$ tali che $f_n \to f$ e $g_n \to g$ e ho che $f * g = \lim_{n\to\infty} f_n * g_n = \lim_{n\to\infty} g_n * f_n = g * f$. □

Teorema 2.8 *Se (G, K) è una coppia di Gelfand, G è unimodulare.*

Dimostrazione: G è unimodulare se e solo se $dx = d(x^{-1})$, essendo $d(x^{-1}) = \Delta(x^{-1})dx$. Dunque, bisogna dimostrare che:

$$\int_G f(x)\,dx = \int_G f(x^{-1})\,dx,\ \forall f \in L^1(G)$$

Per densità, è sufficiente dimostrare la disuguaglianza precedente per $f \in C_C(G)$. Inizio supponendo $f \in C_C(G)^\natural$.
Essendo $f(x) = f(k_1 x k_2)$ si ha:

$$\begin{aligned} &x \in \mathrm{supp}(f) \Leftrightarrow k_1 x k_2 \in \mathrm{supp}(f) \\ &x \in \mathrm{supp}(f)^{-1} \Leftrightarrow x^{-1} \in \mathrm{supp}(f) \Leftrightarrow k_2^{-1} x^{-1} k_1^{-1} \in \mathrm{supp}(f) \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow k_1 x k_2 \in \mathrm{supp}(f)^{-1} \end{aligned} \tag{2.1}$$

(Queste due equivalenze sono ovvie per $x \in A = \{x : f(x) \neq 0\}$, da cui si passa facilmente a $\mathrm{supp}(f) = \overline{A}$). Posso allora costruire una funzione $g \in C_C(G)^\natural$ che valga 1 sull'insieme $\mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(f)^{-1}$: infatti, costruisco una funzione $\tilde{g} \in C_C(G)$ che valga 1 sull'insieme $\mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(f)^{-1}$, e pongo $g = \tilde{g}^\natural$. Per (2.1), anche g vale 1 su $\mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(f)^{-1}$, e $g \in C_C(G)^\natural$.

Allora:

$$\begin{aligned} \int_G f(x)\,dx = \int_G f(x) g(x^{-1})\,dx = \int_G f(x) g(x^{-1} 1_G)\,dx = f * g(1_G) \\ = g * f(1_G) = \int_G g(x) f(x^{-1})\,dx = \int_G f(x^{-1})\,dx \end{aligned}$$

Se ora $f \in C_C(G)$, non necessariamente bi-invariante per K, si ha, per quanto appena dimostrato:

$$\begin{aligned}
\int_G f^\natural(x)\,dx &= \int_G f^\natural(x^{-1})\,dx\\
\int_G \iint_{K\times K} f(k_1xk_2)\,dk_1\,dk_2\,dx &= \int_G \iint_{K\times K} f(k_1x^{-1}k_2)\,dk_1\,dk_2\,dx\\
\iint_{K\times K} \int_G f(k_1xk_2)\,dx\,dk_1\,dk_2 &= \iint_{K\times K} \int_G f(k_1x^{-1}k_2)\,dxdk_1\,dk_2\\
\int_K \int_G f(xk_2)\,dx\,dk_2 &= \int_K \int_G f(k_1x^{-1})\,dx\,dk_1\\
\int_K \Delta_G(k_2)\,dk_2 \int_G f(x)\,dx &= \int_K \Delta_G(k_1^{-1})\,dk_1 \int_G f(x^{-1})\,dx
\end{aligned}$$

Ma $\Delta_G(K)$ è un sottogruppo compatto di $(\mathbb{R}^+ \cdot)$, dunque è $\{1\}$. Quindi:

$$\int_G f(x)\,dx = \int_G f(x^{-1})\,dx$$

□

2.3 Funzioni sferiche

Data $\varphi \in C(G)$, non necessariamente a supporto compatto, consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned}
\chi_\varphi &: C_C(G) \to \mathbb{C}\\
\chi_\varphi(f) &= \int_G f(x)\varphi(x^{-1})\,dx
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Definizione 2.5 Una funzione $\varphi \in C(G)$, $\varphi \neq 0$, si dice *sferica* se:

1. φ è bi-invariante per K;
2. χ_φ è un carattere dell'algebra $C_C(G)^\natural$, ovvero:

$$\chi_\varphi(f * g) = \chi_\varphi(f) \cdot \chi_\varphi(g),\ \forall f, g \in C_C(G)^\natural \tag{2.3}$$

N.B. Una funzione sferica non ha necessariamente supporto compatto.

Data $\varphi \in C(G)$, definisco anche l'applicazione:

$$\begin{aligned}
\Phi_\varphi &: C_C(G) \to \mathbb{C}\\
\Phi_\varphi(f) &= \int_G f(x)\varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$

Lemma 2.9 *Data $\varphi \in C(G)$, χ_φ è un carattere di $C_C(G)^\natural$ se e solo se lo è Φ_φ.*

Dimostrazione: Data $f : G \to \mathbb{C}$, poniamo $f^\surd(x) = f(x^{-1})$. Allora:

$$\begin{aligned} f^\surd * g^\surd(x) &= \int_G f^\surd(y) g^\surd(y^{-1}x)\, dy = \int_G f(y^{-1}) g(x^{-1}y)\, dy \\ &\int_G g(y) f(y^{-1}x^{-1})\, dy = g * f(x^{-1}) = (g * f)^\surd(x) \end{aligned}$$

e dunque $f^\surd * g^\surd = (g * f)^\surd$. Allora:

$$\begin{aligned} &\chi_\varphi(f{*}g) - \chi_\varphi(f)\chi_\varphi(g) \\ &\quad = \int_G f * g(x)\varphi(x^{-1})\, dx - \int_G f(x)\varphi(x^{-1})\, dx \int_G g(x)\varphi(x^{-1})\, dx \\ &\quad = \int_G f * g(x^{-1})\varphi(x)\, dx - \int_G f(x^{-1})\varphi(x)\, dx \int_G g(x^{-1})\varphi(x)\, dx \\ &\quad = \int_G (f * g)^\surd(x)\varphi(x)\, dx - \int_G f^\surd(x)\varphi(x)\, dx \int_G g^\surd(x)\varphi(x)\, dx \\ &\quad = \int_G g^\surd * f^\surd(x)\varphi(x)\, dx - \int_G f^\surd(x)\varphi(x)\, dx \int_G g^\surd(x)\varphi(x)\, dx \\ &\quad = \Phi_\varphi(g^\surd * f^\surd) - \Phi_\varphi(f^\surd)\Phi_\varphi(g^\surd) \end{aligned}$$

e quindi il primo termine è 0 $\forall f, g \in C_C(G)^\natural$ se e solo se lo è l'ultimo, essendo chiaramente $f \in C_C(G)^\natural \Leftrightarrow f^\surd \in C_C(G)^\natural$. $\square$

Teorema 2.10 *Sia $\varphi \in C(G)$, $\varphi \neq 0$. φ è sferica se e solo se, $\forall x, y \in G$:*

$$\int_K \varphi(xky)\, dk = \varphi(x)\varphi(y) \tag{2.4}$$

In particolare, $\varphi(1_G) = 1$.

Dimostrazione: Se vale (2.4), φ è bi-invariante per K. Infatti, sia $g \in G$ tale che $\varphi(g) \neq 0$. Allora:

$$\begin{aligned} \varphi(xk_1)\varphi(g) &= \int_K \varphi(xk_1kg)\, dk = \int_K \varphi(xkg)\, dk = \varphi(x)\varphi(g) \\ \varphi(g)\varphi(k_2y) &= \int_K \varphi(gkk_2y)\, dk = \int_K \varphi(gky)\, dk = \varphi(g)\varphi(y) \end{aligned}$$

da cui $\varphi(xk_1) = \varphi(x)$ e $\varphi(k_2y) = \varphi(y)$. Infine:

$$\varphi(1_G)\varphi(g) = \int_K \varphi(kg)\, dk = \int_K \varphi(g)\, dk = \varphi(g)$$

da cui $\varphi(1_G) = 1$. Rimane quindi da dimostrare che, per φ funzione continua biinvariante per K, χ_φ è un carattere di $C_C(G)^\natural$ se e solo se φ soddisfa (2.4). Per il lemma 2.9 basta dimostrare che Φ_φ è un carattere di $C_C(G)^\natural$ se e solo φ soddisfa (2.4). Inoltre:

$$\Phi_\varphi(f * g) = \Phi_\varphi(f)\Phi_\varphi(g)\ \forall f, g \in C_C(G)^\natural \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Phi_\varphi(f^\natural * g^\natural) = \Phi_\varphi(f^\natural)\Phi_\varphi(g^\natural)\ \forall f, g \in C_C(G)$$

in quanto ogni $f \in C_C(G)^\natural$ può essere espressa come $g^\natural$ per un'opportuna g, ad esempio $g = f$. Si ha che:

$$\begin{aligned}
&\Phi_\varphi(f^\natural * g^\natural) - \Phi_\varphi(f^\natural)\Phi_\varphi(g^\natural)\\
&= \int_G (f^\natural * g^\natural)(x)\varphi(x)\,dx - \int_G f^\natural(x)\varphi(x)\,dx \int_G g^\natural(x)\varphi(x)\,dx\\
&= \int_G \int_G f^\natural(y)g^\natural(y^{-1}x)\varphi(x)\,dy\,dx - \int_G f^\natural(x)\varphi(x)\,dx \int_G g^\natural(x)\varphi(x)\,dx\\
&= \int_G \int_G f^\natural(y)g^\natural(x)\varphi(yx)\,dx\,dy - \int_G f^\natural(x)\varphi(x)\,dx \int_G g^\natural(y)\varphi(y)\,dy\\
&= \iint_{G\times G} f^\natural(x)g^\natural(y)\varphi(xy)\,dx\,dy - \iint_{G\times G} f^\natural(x)g^\natural(y)\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy\\
&= \iint_{G\times G} \big[\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)\big] f^\natural(x)g^\natural(y)\,dx\,dy\\
&= \iint_{G\times G} \iint_{K\times\cdots\times K} \big[\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)\big] f(k_1xk_2)g(k_3yk_4)\,dk_1\cdots\,dk_4\,dx\,dy\\
&= \iint_{K\times\cdots\times K} \iint_{G\times G} \big[\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)\big] f(k_1xk_2)g(k_3yk_4)\,dx\,dy\,dk_1\cdots\,dk_4\\
&= \iint_{K\times\cdots\times K} \iint_{G\times G} \big[\varphi(k_1^{-1}xk_2^{-1}k_3^{-1}yk_4^{-1}) - \varphi(k_1^{-1}xk_2^{-1})\varphi(k_3^{-1}yk_4^{-1})\big]\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot f(x)g(y)\,dx\,dy\,dk_1\cdots\,dk_4\\
&= \iint_{K\times K} \iint_{G\times G} \big[\varphi(xk_2^{-1}k_3^{-1}y) - \varphi(x)\varphi(y)\big] f(x)g(y)\,dx\,dy\,dk_2\,dk_3\\
&= \iint_{G\times G} \int_K \int_K \big[\varphi(xk_2^{-1}k_3^{-1}y) - \varphi(x)\varphi(y)\big] f(x)g(y)\,dk_2\,dk_3\,dx\,dy\\
&= \iint_{G\times G} \left[\int_K \varphi(xk_3^{-1}y)\,dk_3 - \varphi(x)\varphi(y)\right] f(x)g(y)\,dx\,dy\\
&= \iint_{G\times G} \left[\int_K \varphi(xky)\,dk - \varphi(x)\varphi(y)\right] f(x)g(y)\,dx\,dy
\end{aligned}$$

Dunque $\Phi_\varphi(f^\natural * g^\natural) - \Phi_\varphi(f^\natural)\Phi_\varphi(g^\natural) = 0$ per ogni f e g se e solo se $\int_K \varphi(xky)\,dk - \varphi(x)\varphi(y) = 0$. $\square$

Teorema 2.11 *Sia $\varphi \in C(G)$ bi-invariante per K. Allora φ è sferica se e solo se:*

- $\varphi(1_G) = 1$;
- $f * \varphi = \lambda\varphi, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall f \in C_C(G)^\natural$.

In tal caso, $\lambda = \chi_\varphi(f)$.

Dimostrazione: Dev'essere $\lambda = \chi_\varphi(f)$. Infatti:

$$\lambda = \lambda\varphi(1_G) = f * \varphi(1_G) = \int_G f(y)\varphi(y^{-1})\, dy = \chi_\varphi(f)$$

$\Rightarrow$) Il fatto che $\varphi(1_G) = 1$ è già stato dimostrato. Inoltre:

$$\begin{aligned}
\varphi * f(x) &= \int_G f(y)\varphi(y^{-1}x)\, dy = \int_G f(k^{-1}y)\varphi(y^{-1}kx)\, dy \\
&= \int_K \int_G f(k^{-1}y)\varphi(y^{-1}kx)\, dy\, dk = \int_G \int_K f(k^{-1}y)\varphi(y^{-1}kx)\, dk\, dy \\
&= \int_G f(y) \int_K \varphi(y^{-1}kx)\, dk\, dy = \int_G f(y)\varphi(y^{-1})\varphi(x)\, dy \\
&= \varphi(x)\chi_\varphi(f)
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Essendo $\varphi(1_G) = 1$, senz'altro $\varphi \neq 0$. Inoltre:

$$\begin{aligned}
\chi_\varphi(f * g) &= \int_G f * g(x)\varphi(x^{-1})\, dx = \iint_{G\times G} f(y)g(y^{-1}x)\varphi(x^{-1})\, dx\, dy \\
&= \int_G f(y) g * \varphi(y^{-1})\, dy = \int_G f(y)\chi_\varphi(g)\varphi(y^{-1})\, dy = \chi_\varphi(g)\chi_\varphi(f)
\end{aligned}$$

□

2.4 L'algebra $L^1(G)^\natural$

Teorema 2.12 *Il duale di* $L^1(G)^\natural$ *(come spazio vettoriale di Banach) è* $L^\infty(G)^\natural$*, in quanto ogni funzionale è del tipo:*

$$\chi_\varphi : \ f \to \int_G f(x)\varphi(x^{-1})dx$$

con $\varphi \in L^\infty(G)^\natural$ *univocamente determinata.*

Dimostrazione:

$\Leftarrow$) Si ha che χ_φ è continua rispetto alla norma $L^1(G)$. Infatti, se $f_n \xrightarrow{L^1} f$, si ha:

$$\begin{aligned}
\left|\chi_\varphi(f_n) - \chi_\varphi(f)\right| &= \left| \int_G \left[f_n(x) - f(x)\right]\varphi(x^{-1})\, dx \right| \\
&\leq \int_G \left|f_n(x) - f(x)\right|\left|\varphi(x^{-1})\right| dx \leq C \int_G \left|f_n(x) - f(x)\right| dx \to 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Sia χ un carattere di $L^1(G)^\natural$. Tutti i caratteri di un'algebra di Banach commutativa sono forme lineari continue di norma 1, e poichè il duale di L^1 è L^∞, deve esistere $\varphi \in L^\infty(G)$, $\|\varphi\|_\infty = 1$, tale che:

$$\chi(f) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})\,dx$$

Si ha che $\varphi^\natural$ determina lo stesso funzionale di φ su $L^1(G)^\natural$. Sia infatti $f \in L^1(G)^\natural$:

$$\begin{aligned}
\int_G f(x)\varphi^\natural(x^{-1})\,dx &= \int_G f(x) \iint_{K\times K} \varphi(k_1 x^{-1} k_2)\,dk_1\,dk_2\,dx \\
&= \iint_{K\times K} \int_G f(x)\varphi(k_1 x^{-1} k_2)\,dx\,dk_1\,dk_2 \\
&= \iint_{K\times K} \int_G f(k_2 x k_1)\varphi(x^{-1})\,dx\,dk_1\,dk_2 \\
&= \int_G f(x)\varphi(x^{-1})\,dx
\end{aligned}$$

Per questo suppongo direttamente $\varphi \in L^1(G)^\natural$. In realtà φ è unica. Infatti, se $\chi_\varphi = \chi_\psi$ per $\varphi, \psi \in L^\infty(G)^\natural$, si ha che $\chi_\varphi - \chi_\psi = \chi_{\varphi-\psi} = 0$. Dimostro allora che $\chi_\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$:

$$\begin{aligned}
&\int_G f^\natural(x)\varphi(x^{-1})\,dx = 0,\ \forall f \in L^1(G) \\
&\int_G \iint_{K\times K} f(k_1 x k_2)\varphi(x^{-1})\,dk_1\,dk_2\,dx = 0 \\
&\iint_{K\times K} \int_G f(x)\varphi(k_2 x^{-1} k_1)\,dk_1\,dk_2\,dx = 0 \\
&\int_G f(x)\varphi(x^{-1})\,dx = 0,\ \forall f \in L^1(G)
\end{aligned}$$

da cui $\varphi = 0$. Per questo il duale di $L^1(G)^\natural$ è isomorfo a $L^\infty(G)^\natural$ come spazio vettoriale. Dimostriamo che questo isomorfismo è anche un'isometria.

Sia $(L^1(G)^\natural)^\perp$ l'insieme dei funzionali su $L^1(G)$ che si annullano su $L^1(G)^\natural$. Indico con $(L^1(G)^\natural)^*$ il duale di $(L^1(G)^\natural)$. Allora:

$$(L^1(G)^\natural)^* \cong \frac{L^1(G)^*}{(L^1(G)^\natural)^\perp}$$

dove $\cong$ indica un'isometria. Infatti, se $\chi \in (L^1(G)^\natural)^*$, sia $\tilde{\chi}$ la sua estensione in $L^1(G)^*$, che esiste per il teorema di Hahn-Banach. Sia quindi:

$$\psi : (L^1(G)^\natural)^* \to \frac{L^1(G)^*}{(L^1(G)^\natural)^\perp}$$
$$\psi(\chi) = [\tilde{\chi}]$$

ψ è ovviamente ben definita ($\chi_1 = \chi_2 \Rightarrow \tilde{\chi_1} - \tilde{\chi_2} \in (L^1(G)^\natural)^\perp$, è iniettiva ($\chi = 0 \Rightarrow \tilde{\chi} \in (L^1(G)^\natural)^\perp$ ed è suriettiva (se $\sigma \in L^1(G)^*$, $[\sigma] = \psi(\sigma|_{L^1(G)^\natural})$). Dimostro che è un'isometria. Per definizione:

$$\|[\tilde{\chi}]\| = inf\{\|\tilde{\chi} + \rho\|,\ \rho \in (L^1(G)^\natural)^\perp\}$$

Per $\rho = 0$ si ottiene $\|[\tilde{\chi}]\| \leq \|\tilde{\chi}\|$, e quindi, essendo per Hahn-Banach $\|\tilde{\chi}\| = \|\chi\|$, si ha $\|\psi(\chi)\| \leq \|\chi\|$.

Se $\sigma \in L^1(G)^*$, dev'essere del tipo $\sigma_\varphi(f) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})\,dx$, per $\varphi \in L^\infty(G)$. Per quanto dimostrato in precedenza, ci sarà un'unica funzione $\varphi \in L^\infty(G)^\natural$ tale che $[\sigma] = [\sigma_\varphi]$, e quindi ad ogni elemento $[\sigma] \in \frac{L^1(G)^*}{(L^1(G)^\natural)^\perp}$ risulta associata un'unica funzione biK-invariante φ tale che $[\sigma] = [\sigma_\varphi]$. Dimostro che $\|[\sigma]\| = \|\sigma_\varphi\|$. Innanzi tutto, $\forall f \in L^1(G)$, si ha $\|f^\natural\| \leq \|f\|$, infatti:

$$\begin{aligned}\|f^\natural\| &= \int_G \left| \iint_{K\times K} f(k_1xk_2)\,dk_1\,dk_2 \right| dx \leq \int_G \iint_{K\times K} \left|f(k_1xk_2)\right| dk_1\,dk_2\,dx \\ &= \iint_{K\times K} \int_G \left|f(k_1xk_2)\right| dx\,dk_1\,dk_2 = \iint_{K\times K} \|f\|\,dk_1\,dk_2 = \|f\|\end{aligned}$$

Inoltre $|\sigma_{\varphi^\natural}(f)| = |\sigma_\varphi(f^\natural)|$, infatti:

$$\begin{aligned}|\sigma_{\varphi^\natural}(f)| &= \left| \int_G f(x) \iint_{K\times K} \varphi(k_1x^{-1}k_2)\,dk_1\,dk_2\,dx \right| \\ &= \left| \iint_{K\times K} \int_G f(x)\varphi(k_1x^{-1}k_2)\,dx\,dk_1\,dk_2 \right| = \left| \int_G f^\natural(x)\varphi(x^{-1})\,dx \right| \\ &= |\sigma_\varphi(f^\natural)|\end{aligned}$$

Combinando i due risultati precedenti, si ha che se $\|f\| \leq 1$, allora $\|f^\natural\| \leq 1$ e $|\sigma_{\varphi^\natural}(f)| = |\sigma_\varphi(f^\natural)|$, e dunque, $\forall \varphi \in L^\infty(G)$:

$$\|\sigma_{\varphi^\natural}\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |\sigma_{\varphi^\natural}(f)| \leq \sup_{\|f\|\leq 1} |\sigma_\varphi(f)| = \|\sigma_\varphi\|$$

e dunque $\|[\sigma_\varphi]\| = \|\sigma_{\varphi^\natural}\| = \|\varphi^\natural\|$. Infine, l'uguaglianza $|\sigma_{\varphi^\natural}(f)| = |\sigma_\varphi(f^\natural)|$, per $\varphi = \varphi^\natural$, diventa: $|\sigma_{\varphi^\natural}(f)| = |\sigma_{\varphi^\natural}(f^\natural)|$, da cui segue banalmente $\|\sigma_{\varphi^\natural}\| = \|\sigma_{\varphi^\natural}|_{L^1(G)^\natural}\|$. Questo significa che, per $\chi_\varphi \in (L^1(G)^\natural)^*$, $\varphi \in L^\infty(G)^\natural$, si ha $\|\chi_\varphi\| = \|\tilde{\chi_\varphi}\| = \|\psi(\chi_\varphi)\| = \|\varphi\|$. $\square$

Teorema 2.13 *I caratteri di $L^1(G)^\natural$ sono tutte e sole le applicazioni:*

$$f \to \chi_\varphi(f) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})\,dx$$

con φ funzione sferica limitata.

Dimostrazione:

$\Leftarrow$) Segue dal teorema 2.12 che le applicazioni di questa forma sono funzionali. Rimane da dimostrare che con φ sferica limitata sono funzionali moltiplicativi. Se $f, g \in L^1(G)^\natural$, le approssimo con $\{f_n\}, \{g_n\} \subseteq C_C(G)^\natural$, $f_n \to f$ e $g_n \to g$, e ho:

$$\begin{aligned}\chi_\varphi(f * g) = \chi_\varphi\Big(\lim_{n\to\infty} f_n * g_n\Big) &= \lim_{n\to\infty} \chi_\varphi(f_n * g_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \chi_\varphi(f_n)\chi_\varphi(g_n) = \chi_\varphi(f)\chi_\varphi(g)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Segue dal teorema 2.12 che un carattere deve avere questa forma con $\varphi \in L^\infty(G)^\natural$, essendo in particolare un funzionale. Essendo χ un carattere, si ha $\chi(f * g) = \chi(f)\chi(g)$, e:

$$\begin{aligned}\chi(f * g) = \int_G f * g(x)\varphi(x^{-1})\, dx &= \iint_{G\times G} f(y)g(y^{-1}x)\varphi(x^{-1})\, dx\, dy \\ &= \iint_{G\times G} f(y)g(x)\varphi(x^{-1}y^{-1})\, dx\, dy = \int_G f(y) g * \varphi(y^{-1})\, dy\end{aligned}$$

$$\chi(f)\chi(g) = \int_G f(y)\chi(g)\varphi(y^{-1})\, dy$$

da cui, uguagliando:

$$\begin{aligned} g * \varphi(y^{-1}) &= \chi(g)\varphi(y^{-1}) \\ g * \varphi &= \chi(g)\varphi \end{aligned}$$

Infine, se $\varphi \neq 0$ dev'essere $\varphi(1_G) = 1$, infatti:

$$\begin{aligned}& g * \varphi(1_G) = \chi(g)\varphi(1_G) \\ & \int_G g(y)\varphi(y^{-1})\, dy = \int_G g(y)\varphi(y^{-1})\, dy \cdot \varphi(1_G) \\ & \varphi(1_G) = 1\end{aligned}$$

essendo $\chi \neq 0$. $\square$

2.5 Spazi omogenei

Definizione 2.6 Sia $(G, \cdot)$ un gruppo localmente compatto e S uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Si definisce *azione sinistra di G su S* un'applicazione:

$$\begin{aligned}\psi : G \times S &\to S \\ (x, s) &\to x.s\end{aligned}$$

tale che:

- ψ è continua;

- fissato $x \in G$, l'applicazione $\psi(x, \cdot)$ è un omeomorfismo di S;
- $x.(y.s) = (xy).s$, $\forall x, y \in G$, $\forall s \in S$.

Definizione 2.7 Sia $(G, \cdot)$ un gruppo localmente compatto. Si dice *G-spazio* una coppia (S, ψ) dove S è uno spazio di Hausdorff localmente compatto e ψ è un'azione sinistra di G su S.

Definizione 2.8 Un G-spazio (S, ψ) è detto *transitivo* se per ogni $s, t \in S$ esiste $x \in G$ tale che $x.s = t$.

Notazione: Sia $K \leq G$ un sottogruppo chiuso. Indico con G/K lo spazio topologico formato dai laterali *sinistri* di K in G *munito della topologia quoziente.*

Notazione: Sia G un gruppo topologico. Indico con L^g la traslazione sinistra rispetto a g in G e con R^g la traslazione destra rispetto a g^{-1}. In particolare:

$$\begin{aligned} L^g(x) &= gx \\ R^g(x) &= xg^{-1} \end{aligned}$$

L^g e R^g sono omeomorfismi di G in sè.
Indico ancora con L^g la traslazione sinistra rispetto a g in G/K:

$$L^g(xK) = gxK$$

e indico con L la mappa:

$$\begin{aligned} L : G \times G/K &\to G/K \\ L(g, xK) &= L^g(xK) = gxK \end{aligned}$$

Lemma 2.14 *La proiezione $\pi : G \to G/K$ è aperta (e ovviamente continua) e G/K è uno spazio di Hausdorff localmente compatto.*

Dimostrazione: Sia $A \subseteq G$ un aperto. Dimostro che $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto, da cui, per definizione di topologia quoziente, $\pi(A)$ è aperto. Chiaramente $\pi^{-1}(\pi(A)) = AK = \bigcup_{k \in K} Ak$. Ma $\forall k \in K$, Ak è aperto essendo immagine omeomorfa di A tramite $R^{k^{-1}}$, dunque AK è aperto essendo unione di aperti.

Sia $F : G \times G \to G$ definita da $F(x, y) = y^{-1}x$. Si ha che $F^{-1}(K) = \{(x, y) \in G \times G | xK = yK\}$. Essendo F continua e K chiuso, $F^{-1}(K)$ è chiuso. Allora, se $xK \neq yK$, cioè $(x, y) \notin F^{-1}(K)$, trovo un intorno $U(x) \times V(y)$ tutto contenuto in $G \times G - F^{-1}(K)$. Da questo segue che, essendo π aperta, $\pi(U(x))$ e $\pi(V(y))$ sono due intorni di xK e yK in G/K disgiunti, e dunque G/K è di Hausdorff.

Infine, sia $gK \in G/K$. Essendo G localmente compatto, trovo un intorno U di g compatto. $\pi(U)$ è un intorno di gK in G/K essendo π aperta: infatti, per definizione di intorno esiste W aperto tale che $g \in W \subseteq U$, e quindi $gK \in \pi(W) \subseteq \pi(U)$ con $\pi(W)$ aperto. Inoltre, essendo π continua, $\pi(U)$ è compatto, e quindi G/K è localmente compatto. □

Lemma 2.15 *L è continua.*

Dimostrazione: Sia U un aperto di G/K: dimostro che $L^{-1}(U)$ è aperto. Sia $W \subseteq G \times G$ l'insieme delle coppie $(g_1, g_2) \in G \times G$ tali che $g_1 g_2 \in \pi^{-1}(U)$, cioè $\pi(g_1 g_2) = g_1 g_2 K \in U$. W è aperto: infatti, $\pi^{-1}(U)$ è aperto essendo π continua, e W è la controimmagine di $\pi^{-1}(U)$ rispetto alla funzione continua $(g_1, g_2) \to g_1 g_2$. La funzione:

$$\varphi : G \times G \to G \times G/K$$
$$\varphi(g_1, g_2) = \big(g_1, \pi(g_2)\big)$$

è aperta: infatti, dato un aperto base $U(g_1) \times V(g_2)$, si ha che $\varphi\big(U(g_1) \times V(g_2)\big) = U(g_1) \times \pi\big(V(g_2)\big)$ che è aperto essendo π aperta. Ma $L^{-1}(U) = \varphi(W)$: infatti, $(g_1, g_2 K) \in L^{-1}(U) \Leftrightarrow L\big((g_1, g_2 K)\big) \in U \Leftrightarrow g_1 g_2 K \in U \Leftrightarrow g_1 g_2 \in \pi^{-1}(U) \Leftrightarrow (g_1, g_2) \in W$, quindi $L^{-1}(U)$ è esattamente l'immagine tramite φ delle coppie appartenenti a W, dunque è aperto. □

Da quanto appena dimostrato segue che L è un'azione di G su G/K, ed è chiaramente transitiva: quindi, per definizione, $(G/K, L)$ è un G-spazio transitivo. In realtà, quasi tutti i G-spazi transitivi sono di questo tipo. Infatti, sia (S, ψ) un G-spazio transitivo, e sia $s_0 \in S$ fissato. Sia poi:

$$K = \{g \in G : g.s_0 = s_0\}$$

Si verifica banalmente che K è un sottogruppo di G, ed è anche chiuso: infatti, se $k_n \to k$ con $\{k_n\}_{n \in N} \subseteq K$, per la continuità dell'azione si ha $k_n.s_0 \to k.s_0$, ma $\forall n \in N$ $k_n.s_0 = s_0$, dunque $k.s_0 = s_0$, cioè $k \in K$.

Definisco allora la funzione:

$$\Phi : G/K \to S$$
$$\Phi(gK) = g.s_0$$

Si ha che:

- Φ *è ben definita*: infatti, se $g_1 K = g_2 K$, si ha che $g_2^{-1} g_1 \in K$, dunque, per definizione di K, $g_2^{-1} g_1.s_0 = s_0$, cioè $g_1 s_0 = g_2 s_0$.

- Φ *è biunivoca*: la suriettività è ovvia per la transitività dell'azione di G, e $g_1.s_0 = g_2.s_0 \Rightarrow g_2^{-1} g_1.s_0 = s_0 \Rightarrow g_2^{-1} g_1 \in K \Rightarrow g_1 K = g_2 K$.

- Φ *è continua*: $\Phi \circ \pi$ è continua essendo $\Phi \circ \pi(g) = g.s_0$ ed essendo l'azione di G continua per definizione. Per la proprietà universale della topologia quoziente, Φ è anch'essa continua.

Affinchè Φ sia un omeomorfismo, rimane solo da verificare la continuità di Φ^{-1}. Putroppo, questa non è sempre garantita. Ad esempio, sia $G = \mathbb{R}$ con la topologia discreta, e sia $S = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Definiamo come azione la traslazione: $x.s = x + s$. In questo caso, $K = \{0\}$ e Φ è l'identità su R. Tuttavia, Φ^{-1} non è continua: qualunque sottoinsieme di R è aperto in G avendo scelto la topologia discreta, ma la sua controimmagine, cioè se stesso con la topologia euclidea, non è necessariamente aperta.

Φ è sempre un omeomorfismo nel caso in cui G sia σ-compatto (cioè, tale che da ogni ricorprimento aperto di G si può estrarre un sottoricoprimento numerabile).

Teorema 2.16 *Sia G σ-compatto. Allora Φ è un omeomorfismo.*

Dimostrazione: Bisogna dimostrare che Φ^{-1} è continua, cioè che Φ è aperta. Sia $\phi : G \to S$, $\phi(g) = g.s_0$. Allora $\Phi = \phi \circ \pi^{-1}$, ed essendo π^{-1} aperta, basta dimostrare che ϕ è aperta.

Sia U un aperto di G, e sia $x_0 \in U$. Posso trovare $V(1_G)$ un intorno dell'unità in G tale che $x_0VV \subseteq U$: infatti, questo equivale a chiedere $VV \subseteq x_0^{-1}U$, con $x_0^{-1}U$ intorno dell'unità, e quindi, essendo il prodotto $G \times G \to G$ continuo, basta scegliere un aperto del tipo $V \times V$ nella retroimmagine di $x_0^{-1}U$. Posso restringere V in modo che sia simmetrico (cioè $x \in V \Leftrightarrow x^{-1} \in V$): basta considerare $V \cap V^{-1}$, che è ancora un intorno dell'unità essendo l'inversione $x \to x^{-1}$ aperta (è un omeomorfismo). Infine, restringo ancora V in modo che sia compatto.

Se $y \in G$, yV è un intorno di y, e dunque $\{yV\}_{y \in G}$ è un ricoprimento di G. Essendo G σ-compatto, estraggo un sottoricoprimento numerabile $\{y_nV\}_{n \in N}$. Essendo ϕ suriettiva, $\{\phi(y_nV)\}_{n \in N} = \{y_nV.s_0\}_{n \in N}$ è un ricoprimento numerabile di S. Gli insiemi $y_nV.s_0$ sono compatti perchè ϕ è continua, in particolare sono chiusi. La loro unione esaurisce S, quindi ha interno non vuoto, e quindi, per il teorema di Baire, almeno uno di essi ha interno non vuoto. Questi insiemi sono tutti omeomorfi a $\phi(V) = V.s_0$: infatti, $y_nV.s_0 = y_n.(V.s_0)$. Dunque, $V.s_0$ ha interno non vuoto: sia allora $x_1.s_0$, $x_1 \in V$, un punto interno di $V.s_0$. Allora, $x_0.s_0 = x_0x_1^{-1}.(x_1.s_0)$ è un punto interno di $x_0x_1^{-1}(V.s_0)$. Ma $x_0x_1^{-1}(V.s_0) = (x_0x_1^{-1}V).s_0 \subseteq (x_0V^{-1}V).s_0 = (x_0VV).s_0 \subseteq U.s_0$, quindi $x_0.s_0 = \phi(x_0)$ è un punto interno di $U.s_0 = \phi(U)$, e quindi $\phi(U)$ è aperto, essendo x_0 un punto generico di $\phi(U)$. $\square$

Definizione 2.9 Si dice *spazio omogeneo* un G-spazio transitivo (S, ψ) tale che l'applicazione Φ precedentemente introdotta sia un omeomorfismo.

Se (S, ψ) è uno spazio omogeneo posso identificare S a G/K tramite Φ, quindi uno spazio omogeneo può essere pensato direttamente come lo spazio $(G/K, L)$ per K sottogruppo chiuso di G.

Capitolo 3

Operatori differenziali su gruppi di Lie

3.1 Operatori differenziali su varietà

Definizione 3.1 Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Si dice *operatore differenziale lineare* su V un'applicazione $D : C^\infty_C(V) \to C^\infty_C(V)$ tale che:

1. D è lineare;

2. $\mathrm{supp}(Df) \subseteq \mathrm{supp}(f)$, $\forall f \in C^\infty_C(V)$.

Lemma 3.1 *Un'operatore differenziale D su V può essere esteso in maniera unica a un'operatore lineare $D : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$, agente anche su funzioni non a supporto compatto.*

Dimostrazione: Sia $f \in C^\infty(V)$ e sia $x \in V$. Costruisco allora una funzione $\varphi \in C^\infty_C(V)$ che coincide con f in un intorno di x, e pongo $Df(x) = D\varphi(x)$. L'estensione è chiaramente ben definita: se $\varphi, \psi \in C^\infty_C(V)$ coincidono in un intorno di x, si ha che $x \in \mathrm{supp}(\varphi - \psi)^{\complement}$, dunque $x \in \mathrm{supp}(D(\varphi - \psi))^{\complement}$, cioè $D\varphi(x) = D\psi(x)$. $\square$.

Gli operatori differenziali così definiti, in realtà, coincidono con gli operatori differenziali tradizionali, come dimostra il teorema seguente.

Teorema 3.2 *Sia D un operatore differenziale su V. Allora per ogni insieme relativamente compatto U tale che $U \subseteq \overline{U} \subseteq V$, esiste una famiglia finita di funzioni $\{a_\alpha\} \subseteq C^\infty_C(U)$ tale che:*

$$Df = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha f,\ \forall f \in C^\infty_C(U)$$

Per dimostrare il teorema, userò il seguente lemma, di cui ometto la dimostrazione (si veda [2] pag. 235):

Lemma 3.3 *Siano $m > 0$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione con tutte le derivate di ordine minore o uguale a m nulle in 0. Allora, $\forall \varepsilon > 0$ esiste $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, coincidente con f nel complementare di un intorno di 0, nulla in un intorno di 0 e tale che $\|g - f\|_m < \varepsilon$.* □

Dim teorema:

Passo 1: Sia:

$$\|f\|_m^S = \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in S} |D^\alpha f(x)|, \; f \in C^m(S)$$

Dimostro che, per ogni $a \in V$ fissato, esistono un intorno U di a relativamente compatto, $\overline{U} \subseteq V$, un intero m e una costante C tali che:

$$\|Du\|_0 \le C\|u\|_m, \; \forall u \in C_C^\infty(U - \{a\})$$

Infatti, supponiamo per assurdo che questo sia falso per un punto $a \in V$. Allora fisso un intorno di a relativamente compatto U^0, con $\overline{U^0} \subseteq V$. Posso trovare una funzione $u_1 \in C_C^\infty(U^0 - \{a\})$ tale che:

$$\|Du_1\|_0 > 2^2\|u_1\|_1$$

Essendo $u_1 \in C_C^\infty(U^0 - \{a\})$, ci sarà un intorno di a in cui u_1 è nulla, e dunque $U^0 - \mathrm{supp}(u_1)$ è un intorno aperto di a. Quindi, trovo una funzione $u_2 \in C_C^\infty(U^0 - \mathrm{supp}(u_1) - \{a\})$ tale che:

$$\|Du_2\|_0 > 2^4\|u_2\|_2$$

Adesso ragiono similmente su $U^0 - \mathrm{supp}(u_1) - \mathrm{supp}(u_2)$ costruendo u_3, e così via. In questo modo ottengo una successione $\mathrm{supp}(u_1), \mathrm{supp}(u_2), \mathrm{supp}(u_3), \ldots$ tale che:

$$\begin{aligned} &\forall k \in N, \mathrm{supp}(u_k) \subseteq U^0 - \{a\} \\ &\forall k, l \in N, k \ne l, \mathrm{supp}(u_k) \cap \mathrm{supp}(u_l) = \emptyset \end{aligned}$$

e una successione di funzioni $u_1, u_2, u_3, \ldots$ tale che:

$$\begin{aligned} &u_k \in C_C^\infty(U^0 - \mathrm{supp}(u_1) - \cdots - \mathrm{supp}(u_{k-1}) - \{a\}) \\ &\|Du_k\|_0 > 2^{2k}\|u_k\|_k \end{aligned}$$

Allora è ben definita la funzione $u \in C_C^\infty(V)$ pari a:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k} u_k}{\|u_k\|_k}$$

In particolare:

$$u|_{\mathrm{supp}(u_k)} = \frac{2^{-k}u_k}{\|u_k\|_k}$$

Inoltre:

$$u = u|_{\mathrm{supp}(u_k)} + \sum_{h=1, h\neq k}^{\infty} \frac{2^{-h}u_h}{\|u_h\|_h}$$

$$Du = D(u|_{\mathrm{supp}(u_k)}) + D\left(\sum_{h=1, h\neq k}^{\infty} \frac{2^{-h}u_h}{\|u_h\|_h}\right)$$

essendo $\mathrm{supp}(Df) \subseteq \mathrm{supp}(f)$:

$$(Du)|_{\mathrm{supp}(u_k)} = D(u|_{\mathrm{supp}(u_k)})$$

e quindi:

$$(Du)|_{\mathrm{supp}(u_k)} = \frac{2^{-k}Du_k}{\|u_k\|_k}$$

Ma, essendo $\|Du_k\|_0 > 2^{2k}\|u_k\|_k$, cioè $\sup|Du_k| > 2^{2k}\|u_k\|_k$, si ha:

$$\sup\left|(Du)|_{\mathrm{supp}(u_k)}\right| > 2^k$$

e dunque $\forall k \in N$, esiste $x_k \in \mathrm{supp}(u_k)$ tale che $|(Du)(x_k)| > 2^k$, assurdo perchè Du è una funzione continua a supporto compatto, dunque limitata.

Passo 2: Sia $p \in V$ e U un intorno di p come costruito nel passo 1. Sia poi $u \in C_C^\infty(U - \{p\})$. Se $a \in U - \{p\}$, definisco:

$$Q_{\alpha,a}(x) = (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - a_n)^{\alpha_n}$$

La funzione:

$$b_\alpha :\ x \to (DQ_{\alpha,x})(a)$$

appartiene a $C^\infty(U - \{x\})$. Infatti, $Q_{\alpha,a}(x)$ è un polinomio in $a_1, \dots, a_n$ i cui coefficienti sono polinomi in $x_1, \dots, x_n$: applicando D (rispetto a x), ottengo ancora un polinomio in $a_1, \dots, a_n$ i cui coefficienti sono funzioni C^∞ in $x_1, \dots, x_n$, e quindi valutando tutto in a ottengo ancora una funzione C^∞. Considero allora la funzione:

$$f = u - \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha u)(a)Q_{\alpha,a}$$

Si ha che $(D^\alpha f)(a) = 0$ per $|\alpha| \leq m$. Infatti $D^\alpha Q_{\beta,a}(a) = 0$ per $\alpha \neq \beta$ e $D^\alpha Q_{\alpha,a}(a) = \alpha!$, quindi:

$$\begin{aligned}(D^\alpha f)(a) &= (D^\alpha u)(a) - \sum_{|\beta|\leq m} 1\beta!(D^\beta u)(a)(D^\alpha Q_{\beta,a})(a) \\ &= (D^\alpha u)(a) - \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha u)(a)\alpha! = 0\end{aligned}$$

Allora, usando il lemma 3.3, possiamo approssimare f, rispetto a $\|\cdot\|_m$, con funzioni g_ν coincidenti con f nel complementare di un intorno di a e nulle in un intorno di a. Dunque anche le funzioni Dg_ν sono nulle in un intorno di a. Poniamo poi:

$$u_\nu = f - g_\nu$$

Allora $\forall \nu$, u_ν è nulla al di fuori di un intorno di a, quindi $u_\nu \in C_C^\infty(U - \{p\})$. Allora:

$$\|Du_\nu\|_0 \leq C\|u_\nu\|_m$$

e quindi $\|Du_\nu\|_0 \to 0$, in particolare $Du_\nu(a) \to 0$, cioè $Df(a) - Dg_\nu(a) \to 0$. Ma $Dg_\nu(a) = 0$ perchè g_ν è nulla in un intorno di a, dunque $Df(a) \to 0$, cioè $Df(a) = 0$. Quindi, per definizione di f:

$$(Du)(a) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha u)(a)(DQ_{\alpha,a})(a)$$

$$Du = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{1}{\alpha!} b_\alpha D^\alpha u$$

Ponendo $a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} b_\alpha$ si ha la tesi su $U - \{p\}$.

Passo 3: Sia $U \subseteq V$ un aperto, $\overline{U} \subseteq V$ compatto. $\forall a \in \overline{U}$ scegliamo un intorno come nel passo 1, e estraiamo dall'insieme di questi intorni una sottocopertura finita $U_1, \ldots, U_r$ di $\overline{U}$, i cui punti corrispondenti sono $a_1 \in U_1, \ldots, a_r \in U_r$. Per costruzione, $\forall i = 1, ..r$ esistono $m_i \in N$ e $C_i \in R$ tali che:

$$\|Du\|_0 \leq C_i\|u\|_{m_i},\ \forall u \in C_C^\infty(U_i - \{a_i\})$$

Essendo chiaramente $\|\cdot\|_{m_i} \leq \|\cdot\|_{m_j}$ per $m_i < m_j$, considerando $m = \max\{m_1, \ldots, m_r\}$ e $C = \max\{C_1, \ldots, C_r\}$ si ha:

$$\|Du\|_0 \leq C\|u\|_m,\ \forall i, \forall u \in C_C^\infty(U_i - \{a_i\}) \tag{3.1}$$

Gli insiemi $U_1, \ldots, U_r, V - \overline{U}$ costituiscono una copertura di V, a cui si può associare una partizione dell'unità $\phi_1, \ldots, \phi_r, \phi_{r+1}$. Sia poi $u \in C_C^\infty(U - \{a_1\}, \ldots, U - \{a_r\})$. Allora $u = \sum_{i=1}^{r+1} \phi_i u = \sum_{i=1}^{r} \phi_i u$. Per $\phi_i u$ vale (3.1) e, per quanto dimostrato al passo 2:

$$\begin{aligned}
\big(D(\phi_i u)\big)(x) &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\big(D^\alpha(\phi_i u)\big)(x) \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) \sum_{\mu+\nu=\alpha} \binom{\alpha}{\nu} D^\nu \phi_i D^\mu u(x) = \sum_{|\mu|\leq m} b_\mu(x) D^\mu u(x)
\end{aligned}$$

$$\|D(\phi_i u)\|_0 = \left\| \sum_{|\mu|\leq m} b_\mu(x) D^\mu u \right\|_0 = \sup\left| \sum_{|\mu|\leq m} b_\mu(x) D^\mu u \right|$$

$$C \sum_{|\mu|\leq m} \sup|D^\mu u| = C\|u\|_m$$

Da questo segue che (3.1) vale anche per u, infatti:

$$\|Du\|_0 = \left\|\sum_{i=1}^{r} D(\phi_i u)\right\|_0 \leq \sum_{i=1}^{r}\left\|D(\phi_i u)\right\|_0 = \sum_{i=1}^{r}\left\|D(\phi_i u)\right\|_0 \leq C\|u\|_m$$

Allora, ripercorrendo la stessa dimostrazione del passo 2 sull'aperto $U - \{a_1\}, \ldots, U - \{a_r\}$, si ha che:

$$(Du)(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)(D^\alpha u)(x),\ \forall u \in C_C^\infty(U - \{a_1\}, \ldots, U - \{a_r\}) \quad (3.2)$$

Sia $u \in C_C^\infty(U)$. Se $x \in U$, $x \neq a_1, \ldots, a_n$, (3.2) vale per $(Du)(x)$: infatti, basta considerare una funzione $\tilde{u} \in C_C^\infty(U - \{a_1\}, \ldots, U - \{a_r\})$ che coincide con u in un intorno di x e si ha la tesi. Ma, essendo entrambi i membri di (3.2) continui, l'uguaglianza deve valere su tutto U. $\square$

A questo punto, è naturale estendere la definizione di operatore differenziale al caso di funzioni definite su varietà.

Definizione 3.2 Sia M una varietà. Si dice *operatore differenziale* su M un'applicazione *lineare* $D : C_C^\infty(M) \to C_C^\infty(M)$ tale che, $\forall f \in C_C^\infty(M)$, $\mathrm{supp}(Df) \subseteq \mathrm{supp}(f)$.

Lemma 3.4 *Un'operatore differenziale D su M può essere esteso in maniera unica a un'operatore lineare $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, agente anche su funzioni non a supporto compatto.* $\square$

Corollario 3.5 (del teorema) *Sia (U, ϕ) una carta locale di M. Allora $\forall W$ aperto relativamente compatto, $\overline{W} \subseteq U$, esiste una famiglia finita di funzioni $\{a_\alpha\} \subseteq C_C^\infty$ tali che:*

$$Df = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha(f \circ \phi^{-1}) \circ \phi,\ \forall f \in C_C^\infty(W)$$

$\square$

Notazione: Sia M una varietà e $\phi : M \to M$ un diffeomorfismo. Poniamo:

$$D^\phi(f) = D(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}$$

Lemma 3.6 *Se D, E sono operatori differenziali su una varietà M e ϕ un diffeomorfismo di M, si ha:*

$$(DE)^\phi = D^\phi E^\phi$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}(DE)^{\phi}(f) &= (DE)(f\circ\phi)\circ\phi^{-1} = D\big(E(f\circ\phi)\big)\circ\phi^{-1}\\ &= D\big(E(f\circ\phi)\circ\phi^{-1}\circ\phi\big)\circ\phi^{-1} = D\big(E^{\phi}(f)\circ\phi\big)\circ\phi^{-1}\\ &= D^{\phi}\big(E^{\phi}(f)\big) = (D^{\phi}E^{\phi})(f)\end{aligned}$$

□

Definizione 3.3 Un operatore differenziale D è detto *invariante per* ϕ se $D^{\phi} = D$, cioè:

$$D(f\circ\phi) = Df\circ\phi,\ \forall f\in C^{\infty}(M)$$

3.2 L'operatore di Laplace-Beltrami

Sia M una varietà riemanniana di dimensione n (in realtà il discorso che segue si applica anche a varietà pseudo-riemanniane). Indico con TM e T^*M i fibrati tangente e cotangente di M, e indico con $\mathfrak{T}^p_q$ il fibrato dei tensori di tipo (p,q) su M.

Se $f\in C^{\infty}(M)$, esiste un campo vettoriale $\mathrm{grad}(f)$ tale che $\forall X\in TM$ si ha:

$$<\mathrm{grad}(f), X>= df(X)$$

Sviluppando in una carta locale, si ha che:

$$\mathrm{grad}(f) = \sum_{i,k=1}^{n}\big(g^{ik}\partial_i(f)\big)\partial_k$$

Sia poi $X\in TM$ un campo vettoriale e sia ∇ la connessione di Levi-Civita su M. Un campo vettoriale può essere pensato come un tensore di tipo $(0,1)$ ponendo $X(\omega)=\omega(X)$ per $\omega\in T^*M$. Per $Y\in TM$, si ha, per definizione, $\nabla_Y X\in TM$, e dunque si può pensare $\nabla_Y X\in\mathfrak{T}^0_1$. Pensando Y variabile e ponendo $\nabla X(Y)=\nabla_Y X$, si ha che $\nabla X\in\mathfrak{T}^1_1$. In particolare:

$$\nabla X(Y,\omega) = \nabla_X Y(\omega) = \omega(\nabla_Y X)$$

Ricordo che si definisce contrazione $(1,1)$ di un tensore $(1,1)$ la funzione:

$$C^1_1(\omega\otimes X) = \omega(X)$$

Definizione 3.4 Sia $X\in TM$. Si definisce *divergenza di* X la funzione:

$$\mathrm{div}(X) = C^1_1(\nabla X)$$

Ponendo, secondo la consueta notazione, $g_{ij} =< \partial_i, \partial_j >$, $G=[g_{ij}]$, $G^{-1} = [g^{ij}]$ e $\overline{g} = |\det(G)|$, si può vedere che, in carte locali:

$$\mathrm{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sqrt{\overline{g}}X_i\Big)$$

Definizione: Si definisce *operatore di Laplace-Beltrami* l'operatore:

$$\begin{aligned} \Delta : C^{\infty}(M) &\to C^{\infty}(M) \\ \Delta f &= \mathrm{div}\big(\mathrm{grad}(f)\big) \end{aligned}$$

è chiaro che Δ è un operatore differenziale su M. Si ricava che, in carte locali:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{k=1}^{n} \partial_k \left(\sum_{i=1}^{n} g^{ik} \sqrt{g} \cdot \partial_i f \right)$$

Osservazione: La costruzione dell'operatore di Laplace-Beltrami vale ovviamente anche su varietà analitiche dotate di metrica riemanniana analitica, ovvero tale che le funzioni g_{ij} sono analitiche nelle carte locali. Osservando lo sviluppo dell'operatore si nota facilmente che, in tal caso, *i suoi coefficienti sono analitici.*

Teorema 3.7 *L'operatore di Laplace-Beltrami è simmetrico, cioè* $\forall u, v \in C^{\infty}_{C}(M)$*:*

$$\int_M u(x)\Delta v(x)\,dx = \int_M \Delta u(x) v(x)\,dx$$

Inoltre, se Φ *è un diffeomorfismo di* M*,* Δ *è invariante per* Φ *se e solo se* Φ *è un'isometria.*

Dimostrazione: Sia $X \in TM$. Allora:

$$\begin{aligned} \nabla(uX)(Y,\omega) &= \omega\big(\nabla_Y(uX)\big) = \omega\big(Y(u)X + u\nabla_Y X\big) \\ &= Y(u)\omega(X) + u \cdot \omega(\nabla_Y X\big) = du(Y)X(\omega) + u \cdot \nabla X(Y,\omega) \end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} &\nabla(uX) = du \otimes X + u \cdot \nabla X \\ &C^1_1\big(\nabla(uX)\big) = du(X) + u \cdot C^1_1(\nabla X) \\ &\mathrm{div}(uX) = u \cdot \mathrm{div}(X) + X(u) \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} (\mathrm{grad}u)(v) = dv(\mathrm{grad}u) &=< \mathrm{grad}v, \mathrm{grad}u > \\ &=< \mathrm{grad}u, \mathrm{grad}v >= du(\mathrm{grad}v) = (\mathrm{grad}v)(u) \end{aligned}$$

Allora si ha:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(u \cdot \mathrm{grad}v) &= u \cdot \Delta v + (\mathrm{grad}v)(u) \\ u\Delta v - v\Delta u &= \mathrm{div}(u \cdot \mathrm{grad}v) - (\mathrm{grad}v)(u) - \mathrm{div}(v \cdot \mathrm{grad}u) + (\mathrm{grad}u)(v) \\ &= \mathrm{div}(u \cdot \mathrm{grad}v - u \cdot \mathrm{grad}v) \end{aligned}$$

Allora, se dimostro che $\forall X \in TM$:

$$\int_M \operatorname{div}(X)\, dx = 0$$

ottengo che Δ è simmetrico. Per ogni punto scelgo una carta locale e considero una partizione dell'unità $\{\rho_i\}$ associata a questa copertura. Così:

$$\int_M \operatorname{div}(X)\, dx = \int_M \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{div}(\rho_i X)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_M \operatorname{div}(\rho_i X)\, dx$$

Suppondo allora che il supporto di X sia contenuto in una carta locale. Dunque:

$$\int_M \operatorname{div}(X)\, dx = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \big(\sqrt{g} X_i\big)\, dx_1 \cdots dx_n = 0$$

Dimostro adesso che i diffeomorfismi di M Δ-invarianti sono tutte e sole le isometrie. Sia $p \in M$ e (V, ψ) una carta locale in p. Sia Φ un diffeomorfismo di M. Allora $\big(\Phi(V), \psi \circ \Phi^{-1}\big)$ è una carta locale in $\Phi(p)$. Introduco in V le coordinate $x_1, \dots, x_n$ e in $\Phi(V)$ le coordinate $y_1, \dots, y_n$: si ha allora, $\forall x \in V$, $x_i(x) = y_i(\Phi(x))$. Dunque, per $x \in V$, con $\psi(x) = (t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{aligned}
\partial_{y_i}(f)_{\Phi(x)} &= \frac{\partial}{\partial y_i} f \circ \Phi \circ \psi^{-1}(y_1, \dots, y_n)\Big|_{(t_1,\dots,t_n)} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} (f \circ \Phi) \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_n)\Big|_{(t_1,\dots,t_n)} \\
&= \partial_{x_i}(f \circ \Phi)_x = df_{\Phi(x)} \circ d\Phi_x(\partial_{x_i}) = d\Phi_x(\partial_{x_i})(f)
\end{aligned}$$

e quindi $(\partial_{y_i})_{\Phi(x)} = d\Phi_x\big((\partial_{x_i})_x\big)$ e $\partial_{y_i}(f)_{\Phi(x)} = \partial_{x_i}(f \circ \Phi)_x$.

Dallo sviluppo locale di Δ si ha:

$$\Delta f\big(\Phi(x)\big) = \Delta f\big(y(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{g(y)}} \sum_{k=1}^{n} (\partial_{y_k})_{\Phi(x)} \left(\sum_{i=1}^{n} g^{ik}(y) \sqrt{g(y)} \cdot (\partial_{y_i})_{\Phi(x)} f \right)$$

$$\Delta\big(f \circ \Phi\big)(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \sum_{k=1}^{n} (\partial_{x_k})_x \left(\sum_{i=1}^{n} g^{ik}(x) \sqrt{g(x)} \cdot (\partial_{x_i})_x (f \circ \Phi) \right)$$

Sviluppando le derivate si ha:

$$\begin{aligned}
\Delta f\big(\Phi(x)\big) &= \frac{1}{\sqrt{\overline{g}(y)}} \sum_{i,k=1}^{n} (\partial_{y_k})_{\Phi(x)} \Big(g^{ik}(y)\sqrt{\overline{g}(y)} \cdot (\partial_{y_i})_{\Phi(x)} f \Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\overline{g}(y)}} \sum_{i,k=1}^{n} (\partial_{y_k})_{\Phi(x)} \Big(g^{ik}(y)\sqrt{\overline{g}(y)} \Big) \cdot \big((\partial_{y_i})_{\Phi(x)} f\big) + \\
&\qquad + \Big(g^{ik}(y)\sqrt{\overline{g}(y)} \Big) \cdot \Big(\big(\partial^2_{y_k y_i}\big)_{\Phi(x)} f \Big) \\
\Delta\big(f \circ \Phi\big)(x) &= \frac{1}{\sqrt{\overline{g}(x)}} \sum_{i,k=1}^{n} (\partial_{x_k})_x \Big(g^{ik}(x)\sqrt{\overline{g}(x)} \Big) \cdot \big((\partial_{x_i})_x (f \circ \Phi)\big) + \\
&\qquad + \Big(g^{ik}(x)\sqrt{\overline{g}(x)} \Big) \cdot \Big(\big(\partial^2_{x_k x_i}\big)_x (f \circ \Phi) \Big)
\end{aligned}$$

Essendo $(\partial_{y_i})_{\Phi(x)} f = (\partial_{x_i})_x (f \circ \Phi)$, si ha anche:

$$\begin{aligned}
\big(\partial^2_{y_k y_i}\big)_{\Phi(x)} f &= \big(\partial_{y_k}\big)_{\Phi(x)} (\partial_{y_i} f) = (\partial_{x_k})_x \big(\partial_{y_i} f \circ \Phi\big) \\
&= (\partial_{x_k})_x \big(\partial_{y_i} f|_{\Phi(V(x))}\big) = (\partial_{x_k})_x \big((\partial_{x_i})_x (f \circ \Phi)\big) \\
&= \big(\partial^2_{x_k x_i}\big)_x (f \circ \Phi)
\end{aligned}$$

Allora gli sviluppi di $\Delta f\big(\Phi(x)\big)$ e $\Delta\big(f \circ \Phi\big)(x)$ coincidono $\forall f$ se e solo se coincidono i coefficenti delle derivate di f. In particolare, se Φ è un'isometria si ha $g^{ik}(\Phi(x)) = g^{ik}(x)$, da cui $\overline{g}(\Phi(x)) = \overline{g}(x)$, e dunque $\Delta f \circ \Phi = \Delta(f \circ \Phi)$. Viceversa, se $\Delta f \circ \Phi = \Delta(f \circ \Phi)$ si ha, uguagliando i cofficienti delle derivate seconde:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\overline{g}(y)}} g^{ik}(y)\sqrt{\overline{g}(y)} = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}(x)}} g^{ik}(x)\sqrt{\overline{g}(x)} \\
&g^{ik}(\Phi(x)) = g^{ik}(x)
\end{aligned}$$

□

Definizione 3.5 Sia D un operatore differenziale su una varietà M. D è detto *ellittico* se lo è il suo sviluppo in carte locali.

Osservazione: Su una varietà riemanniana l'opearatore di Laplace-Beltrami è ellittico. Infatti, osservando lo sviluppo in carte locali, si nota che il termine omogeneo di grado massimo è:

$$\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} \partial^2_{ki} f$$

e si ha:

$$\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} \xi_i \xi_k = < \underline{\xi}, \underline{\xi} > = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$$

dove $\underline{\xi} = \xi_1 \partial_1 + \cdots + \xi_n \partial_n$.

3.3 Spazio dei laterali G/K

Dimostro in questo paragrafo che su G/K è possibile costruire in modo naturale una struttura di varietà analitica.

Lemma 3.8 *Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di G. Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ con $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$* sottospazi *(non necessariamente sottoalgebre!) di $\mathfrak{g}$. Allora esistono un intorno U_m di 0 in $\mathfrak{m}$ e un intorno U_n di 0 in $\mathfrak{n}$ tali che la funzione:*

$$\begin{aligned} \Phi &: U_m \times U_n \to G \\ \Phi(X, Y) &= \exp(X) \exp(Y) \end{aligned}$$

sia un diffeomorfismo di $U_m \times U_n$ con un intorno di 1_G in G.

Dimostrazione: Sia $X_1, \ldots, X_n$ una base di $\mathfrak{g}$ tale che $X_1, \ldots, X_r$ sia una base di $\mathfrak{m}$ e $X_{r+1}, \ldots, X_n$ una base di $\mathfrak{n}$. Considero un intorno $U(1_G)$ immagine diffeomorfa tramite exp di un intorno di 0 in $\mathfrak{g}$ e costruisco la carta locale:

$$\begin{aligned} \varphi &: U \to \mathbb{R}^n \\ \varphi\big(\exp(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n)\big) &= (t_1, \ldots, t_n) \end{aligned}$$

Sia poi $V(1_G)$ un intorno tale che $V \cdot V \subseteq U$ (essendo il prodotto continuo, basta prendere un intorno del tipo $V \times V$ nella retroimmagine di U), e siano U_m e U_n intorni dell'origine in $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ tali che $\exp(U_m), \exp(U_n) \subseteq V$. Considero allora la mappa:

$$\begin{aligned} &\rho : U_m \times U_n \subseteq \mathfrak{g} \to W \subseteq \mathbb{R}^n \\ &\quad \rho\big((x_1 X_1 + \cdots + x_r X_r), (x_{r+1} X_{r+1} + \cdots + x_n X_n)\big) = (x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

con $W = \rho(U_m \times U_n)$, e la mappa:

$$\begin{aligned} \psi &: W \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \psi &= \varphi \circ \Phi \circ \rho^{-1} \end{aligned}$$

ovvero:

$$\psi(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) = \varphi\big(\exp(x_1 X_1 + \cdots + x_r X_r) \exp(x_{r+1} X_{r+1} + \cdots + x_n X_n)\big)$$

ψ è analitica, e, per $1 \leq i \leq n$ e $\forall j$:

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(0, \ldots, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_j\big(\exp(t X_i)\big)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\delta_{ij} t}{t} = \delta_{ij}$$

Dunque $J\psi(0) = id$, dunque ψ è localmente un diffeomorfismo in 0. Essendo φ e ρ diffeomorfismi, si ha la tesi restringendo opportunamente U_m e U_n. $\square$

Lemma 3.9 *Siano* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *le algebre di Lie di* G *e* K*, e sia* $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ *con* $\mathfrak{m}$ *sottospazio di* $\mathfrak{g}$*. Allora esiste un intorno dell'origine* $U_m \subseteq \mathfrak{m}$ *tale che:*

- $\exp|_{U_m} : U_m \to G$ *sia un diffeomorfismo sull'immagine;*
- $\pi|_{\exp(U_m)} : \exp(U_m) \to G/K$ *sia un omeomorfismo con un intorno di* K *in* G/K*.*

Esiste inoltre $U_h \subseteq \mathfrak{h}$ *intorno dell'origine tale che la funzione:*

$$\Phi : U_m \times U_h \to G$$
$$\Phi(X, Y) = \exp(X)\exp(Y)$$

sia un diffeomorfismo di $U_m \times U_h$ *in un intorno di* 1_G *in* G*.*

Dimostrazione: Siano U_m e U_k due intorni come costruiti nel lemma 3.8. E' noto dalla teoria dei gruppi di Lie che è possibile selezionare un intorno dell'unità $V(1_G) \subseteq G$ tale che $V \cap K = \exp(U_k)$. Essendo la mappa $\varphi : U_m \times U_m \to G$, $\varphi(X, Y) = \exp(-X)\exp(Y)$, continua, $\varphi^{-1}(V)$ è aperto e dunque posso scegliere un intorno *compatto* dell'origine $U(0) \subseteq U_m$ tale che $U \times U \subseteq \varphi^{-1}(V)$, cioè tale che $\exp(-U)\exp(U) \subseteq V$. Restringo allora U_m a U.

$\exp|_U$ è un diffeomorfismo sull'immagine, infatti $U \subseteq U_m$ e, per costruzione (v. lemma 3.8), U_m è contenuto in un intorno di 0 in $\mathfrak{g}$ in cui exp è un diffeomorfismo sull'immagine. Dimostro che $\pi|_{\exp(U)}$ è iniettiva. Infatti, siano $X', X'' \in U$ tali che $\pi(\exp X') = \pi(\exp X'')$. Allora $\exp(-X')\exp(X'') \in K$ e, essendo per costruzione $\exp(-U)\exp(U) \subseteq V$, si ha $\exp(-X')\exp(X'') \in V \cap K$. Ma per costruzione $V \cap K = \exp(U_k)$, dunque $\exp(-X')\exp(X'') = \exp(Z)$, con $Z \in U_k$, e quindi $\exp(X'') = \exp(X')\exp(Z)$ con $X', X'' \in U_m$ e $Z \in U_k$. Allora, per il lemma 3.8, $X' = X''$ e $Z = 0$.

Allora $\pi|_{\exp(U)}$ è biunivoca sull'immagine e, essendo continua e aperta, è un omeomorfismo. Infine, la sua immagine è un aperto, e quindi un intorno di K in G/K: infatti, $\pi\big(\exp(U)\big) = \pi\big(\exp(U)\exp(U_k)\big)$ essendo $\exp(U_k) \subseteq K$. Ma $\exp(U)\exp(U_k) = \Phi(U \times U_k)$, ed essendo $U \times U_k$ intorno di $(0, 0)$ in $U_m \times U_k$, ed essendo Φ un diffemorfismo di $U_m \times U_k$ su un intorno di 1_G in G, $\exp(U)\exp(U_k)$ è aperto. Essendo π aperta, si ha la tesi.

Inoltre, è chiaro che Φ è un diffeomorfismo da $U_m \times U_k$ in un intorno dell'unità in G, in quanto U_m è ottenuto per restrizione dall'intorno U_m costruito nel lemma 3.8, il quale aveva questa proprietà. □

Definizione 3.6 Supponiamo che G/K sia dotato di una struttura di varietà analitica. In tal caso, si dice *sezione analitica su* G/K una coppia (V, σ) dove $V \subseteq G/K$ è un aperto e $\sigma : V \to G$ una funzione analitica tale che $\pi \circ \sigma = id_V$.

Sostanzialmente, una sezione è una funzione da un aperto V di G/K a valori in G, che ad ogni laterale appartenente a V associa un suo elemento in G, in maniera analitica.

Teorema 3.10 *Sia G un gruppo di Lie e K un sottogruppo chiuso. Sia G/K lo spazio topologico dei laterali sinitri munito della topologia quoziente. Allora:*

- *Esiste un'unica struttura analitica su G/K tale che l'azione:*

$$\begin{aligned} L : G \times G/K \to G/K \\ L(x, gK) = xgK \end{aligned}$$

  sia analitica.

- *In questa struttura, π è analitica.*

- *Questa struttura è anche l'unica struttura analitica su G/K tale che π è analitica e $\forall g \in G$, g è contenuto nell'immagine di una sezione analitica (V, σ) su G/K.*

Dimostrazione:

Passo 1: *Costruisco la struttura richiesta.* Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ e $U_m \subseteq \mathfrak{m}$, $U_h \subseteq \mathfrak{h}$ come nel lemma 3.8. Allora, essendo $\pi(\exp(U_m))$ un intorno di K in G/K, $\forall gK \in G/K$ si ha che $U_g = \pi(g\exp(U_m)) = L_g\big(\pi(\exp(U_m))\big)$ è un intorno di gK . Costruisco allora le carte locali:

$$\begin{aligned} &\varphi_g : U_g \to R^r \\ &\qquad \varphi_g\big[\pi\big(g\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)\big)\big] = (x_1, \ldots, x_r) \end{aligned}$$

In questo modo ottengo una struttura analitica. Infatti, sia $U_x \cap U_y \neq \varnothing$: verifico che $\varphi_y\varphi_x^{-1}$ è analitica:

$$\begin{aligned} \varphi_y\varphi_x^{-1}(x_1, \ldots, x_r) &= \varphi_y\big[\pi\big(x\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)\big)\big] \\ &= \varphi_y\big[\pi\big(y \cdot y^{-1}x\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)\big)\big] \\ &= \varphi_y\big[\pi\big(y \cdot \exp(y_1X_1 + \cdots + y_rX_r)\big)\big] \\ &= (y_1, \ldots, y_r) \end{aligned}$$

Inoltre:

$$y^{-1}x\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r) = \exp(y_1X_1 + \cdots + y_rX_r)$$

$$\begin{aligned} y_1X_1 + \cdots + y_rX_r &= \exp^{-1}\big(y^{-1}x\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)\big) \\ &= \exp^{-1} \circ L^{y^{-1}x} \circ \exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r) \end{aligned}$$

e $\exp^{-1} \circ L^{y^{-1}x} \circ \exp$ è analitica essendo composizione di funzioni analitiche. Considero infine la mappa:

$$\begin{aligned} &\psi : \mathfrak{g} \cong R^r \to R^r \\ &\quad \psi(t_1X_1 + \cdots + t_rX_r) = (t_1, \ldots, t_r) \end{aligned}$$

che è chiaramente analitica essendo polinomiale. Allora si ha:

$$\varphi_y\varphi_x^{-1}(x_1, \ldots, x_r) = \psi \circ \exp^{-1} \circ L^{y^{-1}x} \circ \exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)$$

e dunque:

$$\varphi_y\varphi_x^{-1} = \psi \circ \exp^{-1} \circ L^{y^{-1}x} \circ \exp \circ \psi^{-1}$$

Allora $\varphi_y\varphi_x^{-1}$ è analitica essendo composizione di funzioni analitiche.

Passo 2: *In questa struttura π è analitica.* Infatti, ponendo $V_g = g\exp(U_m)\exp(U_h) = g\Phi(U_m, U_h)$, si otttiene:

$$\begin{aligned} \pi|_{V_g}\big(g\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)\exp(x_{r+1}X_{r+1} + \cdots + x_nX_n)\big) \\ = g\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)K \end{aligned}$$

e, passando alle carte locali su G/K:

$$\begin{aligned} \pi|_{V_g} \circ \varphi_{U_g}\big(g\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)\exp(x_{r+1}X_{r+1} + \cdots + x_nX_n)\big) \\ = (x_1, \ldots, x_r) \end{aligned}$$

da cui, ponendo:

$$\begin{aligned} &\tilde{\pi} : \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} \to \mathfrak{m} \\ &\quad \tilde{\pi}(X, Y) = X \\ &\tilde{\psi} : \mathfrak{m} \to R^r \\ &\quad \tilde{\psi}(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r) = (x_1, \ldots, x_r) \end{aligned}$$

si ha:

$$\pi|_{V_g} \circ \varphi_{U_g} = \tilde{\psi} \circ \tilde{\pi} \circ \Phi^{-1} \circ L^{g^{-1}}$$

e dunque π è analitica in quanto composizione di funzioni analitiche.

Passo 3: *Se $g \in G$, g è contenuto nell'immagine di una sezione analitica su G/K.* è vero per cstruzione: basta considerare $V = U_g = g\exp(U_m)$ e $\sigma\big[\pi\big(g\exp(X)\big)\big] = g\exp(X)$. σ è analitica in quanto, passando alle carte locali su G/K, si ha $\sigma \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = g\exp(x_1X_1 + \cdots + x_nX_n)$.

Passo 4: *L è analitica.* Infatti, essendo $L(g, xK) = \pi(gx)$, sfrutto la sezione appena costruita per sollevare xK a $\sigma(xK) \in G$ (chiaramente $xK = \sigma(xK)K$), e ho che $L(g, xK) = \pi\big(g\sigma(xK)\big)$. In questo modo, è facile verificare che L è composizione di funzioni analitiche.

Passo 5: *Unicità.* Supponiamo che G/K^* sia G/K con la struttura analitica appena introdotta, e sia G/K dotato di una struttura qualunque rispetto a cui L è analitica. Per dimostrare che le due strutture sono compatibili, dimostro che l'identità $i : G/K^* \to G/K$ e la sua inversa i^{-1} sono analitiche, cioè che i è un diffeomorfismo analitico. Siano π^* e π le rispettive proiezioni. Anche π dev'essere analitica, in quanto $\pi(g) = gK = L(g, K)$. Per dimostrare che i è analitica, basta dimostrare che lo è nel punto $K \in G/K$: infatti, se $gK \in G/K$, si ha $i = L^g \circ i \circ L^{*g^{-1}}$, ed essendo L e L^* analitiche si ha che i è analitica in gK. Se considero $\pi^{*-1} : \exp(U_m) \to G$, ho che $i = \pi \circ \pi^{*-1}$, e quindi è analitica nell'origine. Se dimostro che il suo differenziale è invertibile, ho che i è localmente un diffeomorfismo analitico. π^{*-1} ha differenziale iniettivo perchè è un diffeomorfismo analitico sull'immagine, e la sua immagine (contenuta in $\mathfrak{g}$) è lo spazio tangente a $\exp(U_m)$, ovvero $\mathfrak{m}$. Inoltre, dimostro che $Ker(d\pi) = \mathfrak{h}$. Infatti, sia $d\pi(X) = 0$. Allora, $\forall f \in C^\infty(G/K)$:

$$0 = (d\pi X)f = X(f \circ \pi) = \left\{\frac{d}{dt} f \circ \pi\big(\exp(tX)\big)\right\}_{t=0} = \left\{\frac{d}{dt} f\big(\exp(tX)K\big)\right\}_{t=0}$$

Data $f \in C^\infty(G/K)$ e $s \in R$, posso costruire $f^* \in C^\infty(G/K)$ ponendo $f^*(gK) = f\big(\exp(sX)gK\big)$. Allora:

$$\begin{aligned} 0 = (d\pi X)f^* &= \left\{\frac{d}{dt} f^*\big(\exp(tX)K\big)\right\}_{t=0} = \left\{\frac{d}{dt} f\big(\exp(sX)\exp(tX)K\big)\right\}_{t=0} \\ &= \left\{\frac{d}{dt} f\big(\exp\big((s+t)X\big)K\big)\right\}_{t=0} = \left\{\frac{d}{d\tilde{t}} f\big(\exp(\tilde{t}X)K\big)\right\}_{\tilde{t}=s} \end{aligned}$$

e dunque f è costante su $\exp(\tilde{t}X)K$. Essendo f arbitraria, dev'essere $\exp(\tilde{t}X)K = K$ $\forall \tilde{t} \in R$, e dunque $X \in \mathfrak{h}$. Viceversa, è chiaro che se $X \in \mathfrak{h}$ allora $d\pi(X) = 0$: infatti, $\exp(tX)$ è una curva in K e quindi:

$$(d\pi X)f = \left\{\frac{d}{dt} f\big(\exp(tX)K\big)\right\}_{t=0} = \left\{\frac{d}{dt} f(K)\right\}_{t=0} = 0$$

Allora $Ker(d\pi) = \mathfrak{h}$, ed essendo $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$, si ha che $d\pi|_{\mathfrak{m}}$ è suriettiva (quindi biunivoca).

Allora $d\pi \circ d\pi^{*-1}$ è biunivoca, e quindi $i = \pi \circ \pi^{*-1}$ è un diffeomorfismo analitico nell'origine, quindi la struttura analitica su G/K è compatibile con quella precedentemente introdotta. Infine, supponiamo che π sia analitica e che $\forall g \in G$, g sia contenuto in una sezione analitica su G/K. Allora, $i = \pi \circ \pi^{*-1}$ è un diffeomorfismo: infatti, fissato $gK \in G/K$, costruisco una sezione (V, σ), V intorno di gK, a valori in un intorno di g, e ho che $i = \pi \circ \sigma$, dunque i è analitica. Stesso ragionamento per l'inversa. Dunque le due strutture coincidono. □

Lemma 3.11 *Sia $C_K^\infty(G)$ l'algebra delle funzioni $C^\infty(G)$ invarianti a destra* *per K ($f(xk) = f(x)$, $\forall x \in G, k \in K$). L'applicazione:*

$$\varphi : C^\infty\big(G/K\big) \to C_K^\infty(G)$$
$$\varphi(f) = f \circ \pi$$

è un isomorfismo di algebre.

Dimostrazione: φ è ben definita essendo π C^∞, ed è ovviamente lineare e iniettiva. E' anche suriettiva: infatti, se $f \in C_K^\infty(G)$, costruisco $\tilde{f} \in C^\infty(G/K)$ pari a $\tilde{f}(xK) = f(x)$. $\tilde{f}$ è ben definita essendo f invariante a destra per K (quindi costante sui laterali), ed è C^∞, infatti, se $xK \in G/K$, costruisco una sezione (V, σ) intorno a xK e ho che, in V, $\tilde{f} = f \circ \sigma$. Essendo $f = \varphi(\tilde{f})$ si ha la tesi. Infine, è ovvio che φ conservi il prodotto. $\square$

Corollario 3.12 *Sia $C_K^\infty(G/K)$ l'algebra delle funzioni $C^\infty(G/K)$ invarianti per traslazione* destra *rispetto a K. L'applicazione:*

$$\varphi : C_K^\infty\big(G/K\big) \to C^\infty(G)^\natural$$
$$\varphi(f) = f \circ \pi$$

è un isomorfismo di algebre. $\square$

Teorema 3.13 *G/K ammette una struttura riemanniana* analitica *invariante per l'azione di G, ovvero tale che, $\forall x, g \in G$, $\forall v, w \in T_{xK}(G/K)$:*

$$< v, w >_{xK} = < dL^g(v), dL^g(w) >_{L^g(xK)}$$

Dimostrazione: Sia (U_K, φ_K) la carta locale di $K \in G/K$ nell'atlante analitico appena introdotto. Pongo allora, per $v, w \in T_K(G/K)$:

$$<< v, w >>_K = < d\varphi_K(v), d\varphi_K(w) >$$

dove $< \cdot, \cdot >$ indica l'usuale prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Sia allora:

$$< v, w >_K = \int_K << dL^k(v), dL^k(w) >> \; dk$$

è chiaro quindi che, $\forall k \in K$:

$$< dL^k(v), dL^k(w) >_K = < v, w >_K$$

Pongo poi, per $g \in G$ e $v, w \in T_{gK}(G/K)$:

$$< v, w >_{gK} = < dL^{g^{-1}}(v), dL^{g^{-1}}(w) >_K$$

Bisogna verificare che la metrica così definita non dipende dal rappresentante g scelto. In effetti:

$$\begin{aligned} < v, w >_{gkK} &= < dL^{k^{-1}} \circ dL^{g^{-1}}(v), dL^{k^{-1}} \circ dL^{g^{-1}}(w) >_K \\ &= < dL^{g^{-1}}(v), dL^{g^{-1}}(w) >_K = < v, w >_{gK} \end{aligned}$$

Verifico che questa metrica è analitica: infatti, sia $gK \in G/K$ e (U_{gK}, φ_{gK}) la sua carta locale. Allora, basta verificare che l'applicazione:

$$\begin{aligned}\psi : U_{gK} &\to R \\ \psi(xK) &=< \partial_i, \partial_j >_{xK}\end{aligned}$$

è analitica $\forall i, j \in \{1, \ldots, r\}$. In effetti, fissato $xK \in U_{gK}$, costruisco una sezione analitica (V_{xK}, σ_{xK}) intorno a xK, e dunque, $\forall yK \in V_{xK}$:

$$\begin{aligned}\psi(yK) &=< \partial_i, \partial_j >_{yK}=< dL^{y^{-1}}(\partial_i), dL^{y^{-1}}(\partial_j) >_K \\ &=< dL^{\sigma(y)^{-1}}(\partial_i), dL^{\sigma(y)^{-1}}(\partial_j) >_K \\ &=< d\varphi_K \circ dL^{\sigma(y)^{-1}}(\partial_i), d\varphi_K \circ dL^{\sigma(y)^{-1}}(\partial_j) >\end{aligned}$$

e quindi è analitica essendo il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ analitico. Infine, è chiaro per costruzione che questa metrica è invariante per l'azione di G:

$$\begin{aligned}< dL^g(v), dL^g(w) >_{L^g(xK)} &=< dL^g(v), dL^g(w) >_{gxK} \\ &=< dL^{(gx)^{-1}} \circ dL^g(v), dL^{(gx)^{-1}} \circ dL^g(w) >_K \\ &=< dL^{x^{-1}}(v), dL^{x^{-1}}(w) >_K=< v, w >_{xK}\end{aligned}$$

□

Osservazione: Lo spazio tangente in K a G/K, $T_K(G/K)$, può essere identificato con $\mathfrak{m}$: allora, $\pi \circ \exp$ è un diffeomorfismo locale nell'origine da $T_K(G/K)$ in G/K.

3.4 Algebre di operatori differenziali

Notazione: Indico con $\mathbb{D}(G)$ l'algebra degli operatori differenziali su G invarianti per traslazione sinstra:

$$D(f \circ L^g) = Df \circ L^g,\ \forall f \in C^\infty(G), \forall g \in G$$

Sia $K \leq G$ un sottogruppo chiuso. Indico con $\mathbb{D}_K(G)$ l'algebra degli operatori appartenenti a $\mathbb{D}(G)$ invarianti per traslazione destra rispetto a elementi di K:

$$D(f \circ R^k) = Df \circ R^k,\ \forall f \in C^\infty(G), \forall k \in K$$

Notazione: Indico con $\mathbb{D}(G/K)$ l'algebra degli operatori differenziali su G/K invarianti per traslazione sinistra rispetto a elementi di G (traslazione dei laterali):

$$D(f \circ L^g) = Df \circ L^g,\ \forall f \in C^\infty\big(G/K\big), \forall g \in G$$

Le strutture appena definite sono algebre rispetto alla ovvia struttura di spazio vettoriale sugli operatori a cui si aggiunge la composizione come prodotto.

Teorema 3.14 *Sia $f \in C(G \times K \times \cdots \times K)$, con $K \subseteq G$ compatto, e sia, $\forall (k_1, \ldots, k_n) \in K^n$, $f(\cdot, k_1, \ldots, k_n) \in C^\infty(G)$. Sia poi:*

$$g(x) = \int_{K \times \cdots \times K} f(x, k_1, \ldots, k_n)\, dk_1 \cdots dk_n$$

Allora g appartiene a $C^\infty(G)$. Inoltre, $\forall D \in \mathbb{D}(G)$, si ha:

$$Dg(x) = \int_{K \times \cdots \times K} D^{(x)} f(x, k_1, \ldots, k_n)\, dk_1 \cdots dk_n$$

Dimostrazione:

Passo 1: *g è continua.* Infatti, se $x_j \to x$ in G, pongo:

$$\phi_j(k_1, \ldots, k_n) = f(x_j, k_1, \ldots, k_n)$$
$$\phi(k_1, \ldots, k_n) = f(x, k_1, \ldots, k_n)$$

e ho che g è continua se e solo se $\int \phi_j \to \int \phi$, che segue dal teorema di convergenza dominata a patto di trovare una maggiorante L^1 per le $|\phi_j|$. Essendo $x_j \to x$ e G localmente compatto, posso supporre $\{x_j\} \subseteq C$, con C compatto. Dunque $|\phi_j| \in f(C \times K \times \cdots \times K)$, ed essendo f continua si ha $|\phi_j| \le \alpha$. La funzione costante α è L^1 essendo $K \times \cdots \times K$ compatto.

Passo 2: *g è $C^\infty(G)$.* Infatti, sia $x \in G$: considero una carta locale (U, ϕ) in x, *con U compatto.* Allora, ponendo $\tilde{\phi}(x, \underline{k}) = \big(\phi(x), \underline{k}\big)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} g \circ \phi(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g \circ \phi(x + h\underline{e}_j) - g \circ \phi(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \int_{K \times \cdots \times K} \frac{f\big(\phi(x + h\underline{e}_j), \underline{k}\big) - f\big(\phi(x), \underline{k}\big)}{h} d\underline{k} \\
&= \lim_{h \to 0} \int_{K \times \cdots \times K} \frac{f \circ \tilde{\phi}(x + h\underline{e}_j, \underline{k}) - f \circ \tilde{\phi}(x, \underline{k})}{h} d\underline{k} \\
&= \lim_{h \to 0} \int_{K \times \cdots \times K} \frac{\partial f \circ \tilde{\phi}}{\partial x_j}\big(x + \theta h e_j, \underline{k}\big) d\underline{k}
\end{aligned}$$

con $0 < \theta < 1$, per il teorema di Lagrange. Quindi:

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{K \times \cdots \times K} \frac{\partial f \circ \tilde{\phi}}{\partial x_j}\big(x + \theta h e_j, \underline{k}\big) d\underline{k}\right] - \frac{\partial f \circ \tilde{\phi}}{\partial x_j}\big(x, \underline{k}\big) \\
&\qquad = \int_{K \times \cdots \times K} \left[\frac{\partial f \circ \tilde{\phi}}{\partial x_j}\big(x + \theta h e_j, \underline{k}\big) - \frac{\partial f \circ \tilde{\phi}}{\partial x_j}\big(x, \underline{k}\big)\right] d\underline{k}
\end{aligned}$$

Adesso, essendo $\frac{\partial f \circ \tilde{\phi}}{\partial x_j}$, funzione di $(h, \underline{k})$), continua in un intorno compatto di $(0, \underline{k})$, dal teorema di convergenza dominata si ha la tesi. Iterando i passi 1 e 2, si ha che sono ben definite le derivate parziali di qualunque ordine, dunque $g \in C^\infty(G)$.

Passo 3: La dimostrazione del passo 2 implica che, per operatori del tipo D^α, con α multiindice, si ha:

$$D^\alpha g(x) = \int_{K\times\cdots\times K} D^\alpha f(x, k_1, \dots, k_n)$$

Poichè D si scrive localmente come $D = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ per opportune funzioni $a_\alpha \in C^\infty$, si ha banalmente la tesi. $\square$

Notazione: Sia $K \subseteq G$ un compatto e $D \in \mathbb{D}(G)$. Definisco l'operatore:

$$D^K = \int_K D^{R^k}\, dk$$

in questo modo:

$$\left(\int_K D^{R^k}\, dk\right)(f) = \int_K D^{R^k}(f)\, dk$$

Teorema 3.15 *Sia $D \in \mathbb{D}(G)$. L'operatore D^K è ben definito e appartiene a $\mathbb{D}_K(G)$.*

Dimostrazione: Per definizione, $D^K f = \int_K D\big(f \circ R^k\big) \circ R^{k^{-1}}\, dk$. Se dimostro che la funzione integranda è $C^\infty(G \times K)$, per il teorema 3.14 ho che la funzione integrale è $C^\infty(G)$. Ma $R^{(k^{-1})}(x)$ è C^∞. $f \circ R^k(x)$ è anch'essa C^∞, e quindi la sua immagine tramite D è ancora C^∞.

$\int_K D^{R^k}\, dk$ è chiaramente lineare, rimane da dimostrare che è a supporto decrescente (il che implica che mandi funzioni a supporto compatto in funzioni a supporto compatto). Ma se $x \notin \mathrm{supp}(f)$, esiste un intorno $U(x)$ tale che $f|_{U(x)} = 0$. Allora $f \circ R^k|_{R^{(k^{-1})}(U(x))} = 0\ \forall k \in K$, quindi $D(f \circ R^k)|_{R^{(k^{-1})}(U(x))} = 0\ \forall k \in K$, quindi $D(f \circ R^k) \circ R^{(k^{-1})}|_{U(x)} = 0$ $\forall k \in K$, quindi $\big(\int_K D(f \circ R^k) \circ R^{(k^{-1})}\big)|_{U(x)} = 0$.

Rimane da dimostrare l'invarianza per traslazione. Infatti:

$$\begin{aligned} D^K(f \circ L^g) &= \int_K D(f \circ L^g \circ R^k) \circ R^{k^{-1}}\, dk = \int_K D(f \circ R^k \circ L^g) \circ R^{k^{-1}}\, dk \\ &= \int_K D(f \circ R^k) \circ L^g \circ R^{k^{-1}}\, dk = \int_K D(f \circ R^k) \circ R^{k^{-1}} \circ L^g\, dk \\ &= \int_K D^{R^k}(f) \circ L^g\, dk \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} D^K(f \circ L^g)(x) &= \int_K D^{R^k}(f)(gx)\, dk \\ D^K(f \circ L^g)(g^{-1}x) &= \int_K D^{R^k}(f)(x)\, dk \\ D^K(f \circ L^g) \circ L^{g^{-1}} &= D^K f \end{aligned}$$

Infine, rimane l'invarianza a destra per K. Sia $h \in K$:

$$\begin{aligned} D^K(f \circ R^h) &= \int_K D(f \circ R^h \circ R^k) \circ R^{k^{-1}}\, dk \\ &= \int_K D(f \circ R^{hk}) \circ R^{k^{-1}}\, dk = \int_K D(f \circ R^k) \circ R^{k^{-1}h}\, dk \\ &= \int_K D(f \circ R^k) \circ R^{k^{-1}} \circ R^h\, dk = \int_K D^{R^k}(f) \circ R^h\, dk \end{aligned}$$

Così:

$$\begin{aligned} D^K(f \circ R^h)(x) &= \int_K D^{R^k}(f)(xh)\, dk \\ D^K(f \circ R^h)(xh^{-1}) &= \int_K D^{R^k}(f)(x)\, dk \\ D^K(f \circ R^h) \circ R^{h^{-1}} &= \int_K D^{R^k}(f)\, dk \end{aligned}$$

□

Lemma 3.16 *Sia $D \in \mathbb{D}(G)$, e siano $f, g \in C_C^\infty(G)$. Allora:*

$$D(f * g) = f * Dg$$

Dimostrazione: Sia $K = \mathrm{supp}(f)$. Allora:

$$f * g(x) = \int_K f(y) g(y^{-1}x)\, dy$$

Dunque, per il teorema 3.14:

$$D(f * g)(x) = \int_K f(y) D\big[g(y^{-1}x)\big]\, dy = \int_K f(y) Dg(y^{-1}x)\, dy = f * Dg(x)$$

□

Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie di G, pensata come insieme dei campi vettoriali su G invarianti per traslazione sinistra, e sia $X \in \mathfrak{g}$: per definizione, $X(g) = (dL^g)_{1_G}(X)$. Per definizione di dL^g:

$$\begin{aligned} Xf(g) = X(f \circ L^g)(1_G) &= \left\{ \frac{d}{dt} f \circ L^g\big(\exp(tX)\big) \right\}_{t=0} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} f\big(g \cdot \exp(tX)\big) \right\}_{t=0} \end{aligned}$$

Lemma 3.17 *$X \in \mathbb{D}(G)$.*

Dimostrazione: Il fatto che sia un operatore differenziale è ovvio, essendo un campo vettoriale. Rimane da verificare l'invarianza per traslazione sinistra:

$$\begin{aligned} X(f \circ L^g)(x) = X(f \circ L^g \circ L^x)(1_G) = X(f \circ L^{gx})(1_G) &= Xf(gx) \\ &= (Xf \circ L^g)(x) \end{aligned}$$

□

Richiamo ora alcuni fatti di base sui gruppi di Lie. In particolare, se $(G, \cdot)$ è un gruppo di Lie, $\forall g \in G$ l'applicazione:

$$\begin{aligned} \Psi_g : G \to G \\ \Psi_g(x) = gxg^{-1} \end{aligned}$$

è un automorfismo di G che fissa l'identità. Sia ora $Ad(g) = (d\Psi_g)_{1_G}$ il suo differenziale nell'identità: $\forall g \in G$, $Ad(g)$ è un automorfismo dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G, e dunque la mappa:

$$Ad: \ G \to GL(\mathfrak{g})$$

è una rappresentazione di G in $\mathfrak{g}$. Essendo Ψ_g un automorfismo, si ha che:

$$\begin{aligned} \Psi_g\big(\exp(X)\big) &= \exp\big(d\Psi_g(X)\big) \\ g\exp(X)g^{-1} &= \exp\big(Ad(g)X\big) \end{aligned}$$

Essendo Ad una rappresentazione, il suo differenziale ad è una rappresentazione dell'algebra di Lie:

$$ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$$

e:

$$\begin{aligned} Ad\big(\exp(X)\big) &= \exp\big(ad(X)\big) \\ Ad\big(\exp(X)\big) &= e^{ad(X)} \end{aligned}$$

da questo si può dedurre:

$$\big(ad(X)\big)(Y) = [X, Y]$$

Si tratta adesso di estendere queste operazioni agli operatori differenziali. In particolare, poichè $\forall X \in \mathfrak{g}$ X è un operatore differenziale, possiamo costruire l'operatore $Ad(g)(X)$:

$$\begin{aligned} \big(Ad(g)(X)f\big)(x) &= \left\{\frac{d}{dt} f\big[x \cdot \exp\big(tAd(g)(X)\big)\big]\right\}_{t=0} \\ &= \left\{\frac{d}{dt} f(xg\exp(tX)g^{-1})\right\}_{t=0} \\ &= \left\{\frac{d}{dt} f(xg\exp(tX)g^{-1})\right\}_{t=0} \\ &= \left\{\frac{d}{dt} f \circ R^{g^{-1}}(xg\exp(tX))\right\}_{t=0} \\ &= X(f \circ R^{g^{-1}})(xg) = X(f \circ R^{g^{-1}}) \circ R^g(x) \\ &= X^{R^g}(x) \end{aligned}$$

Allora, estendendo questo fatto a tutti gli operatori differenziali, poniamo:

Definizione 3.7 Sia $D \in \mathbb{D}(G)$. Allora indico con $Ad(g)D$ l'operatore:

$$Ad(g)D = D^{R^{g^{-1}}}$$

Osservazione: $\forall g \in G$, $Ad(g)$ è un automorfismo di $\mathbb{D}(G)$.

Lemma 3.18 *L'operatore di Laplace-Beltrami di G appartiene sempre a $\mathbb{D}(G)$. L'operatore di Laplace-Beltrami di G/K appartiene sempre a $\mathbb{D}(G/K)$.*

Dimostrazione: In entrambi i casi L^g è un'isometria $\forall g \in G$, dunque Δ è invariante per L^g. □

E' possibile costruire un particolare sviluppo di Tayolor per funzioni analitiche nel caso dei gruppi di Lie. In particolare:

Teorema 3.19 (Sviluppo di Taylor) *Sia $f \in C(G)$ analitica. Allora, per un opportuno intorno di 0 in $\mathfrak{g}$:*

$$f\big(g\exp(X)\big) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} X^i f(g)$$

Dimostrazione: Sia $X_1, \dots, X_n$ una base di $\mathfrak{g}$, e, per $X \in \mathfrak{g}$, siano $x_1, \dots, x_n$ i coefficienti di X rispetto a questa base. Allora, essendo exp analitica, per X in un opportuno intorno dell'origine si ha:

$$f\big(g\exp(X)\big) = P(x_1, \dots, x_n)$$

con P serie di potenze uniformemente convergente. Allora, *fissato* X in quest'intorno:

$$f\big(g\exp(tX)\big) = P(tx_1, \dots, tx_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_m t^m$$

con $0 \leq t \leq 1$, e con:

$$a_m = \frac{d^m}{dt^m} f\big(g\exp(tX)\big)\Big|_{t=0} = X^m f(g)$$

Per $t = 1$ si ha la tesi. □

3.5 Caratterizzazione di $\mathbb{D}(G)$ e $\mathbb{D}(G/K)$

Dato uno spazio vettoriale V, la sua *algebra simmetrica* $S(V)$ è l'algebra tensoriale $T(V)$ quozientata in modo da identificare $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ con $v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}$ $\forall \sigma \in S_r$ $\forall r \in \mathbb{N}$, con S_r gruppo simmetrico su r elementi.

Se $X_1, \dots, X_n$ è una base di V, S(V) si identifica con l'algebra dei polinomi su $X_1, \dots, X_n$:

$$p(X_1, \dots, X_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1 \cdots k_n} X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$$

Otteniamo così una caratterizzazione di $\mathbb{D}(G)$:

Teorema 3.20 *Sia G un gruppo di Lie e $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Sia $S(\mathfrak{g})$ l'algebra simmetrica su $\mathfrak{g}$. Allora esiste un'unica applicazione lineare:*

$$\lambda : \ S(\mathfrak{g}) \to \mathbb{D}(G)$$

tale che, $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall m \in N$:

$$\lambda(X^m) = X^m$$

Inoltre, λ è biunivoca *e, se $X_1, \dots, X_n$ è una base di $\mathfrak{g}$ e $P \in S(\mathfrak{g})$, si ha, $\forall f \in C^\infty(G)$:*

$$\begin{aligned}&\big[\lambda\big(P(X_1,\dots,X_n)\big)f\big](g)\\&\qquad = \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big)f\big(g\exp(t_1X_1 + \dots + t_nX_n)\big)\Big\}_{t_1,\dots,t_n=0}\end{aligned} \tag{3.3}$$

Dimostrazione: Sia $X_1, \dots, X_n$ una base di $\mathfrak{g}$. $\forall g \in G$ considero la carta locale precedentemente introdotta:

$$\begin{aligned}&\varphi_g : U_g \to \mathbb{R}^n\\&\quad\varphi_g\big(g\exp(t_1X_1 + \dots + t_nX_n)\big) = (t_1, \dots, t_n)\end{aligned}$$

Allora, l'equazione (3.3) definisce un operatore differenziale $\lambda(P)$ su G:

$$\big(\lambda(P)f\big)(g) = \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big)(f \circ \varphi_g^{-1})(t_1, \dots, t_n)\Big\}_{t_1,\dots,t_n=0}$$

$\lambda(P)$ è chiaramente lineare su $C_0^\infty(G)$ e a supporto decrescente. Infine, $\lambda(P) \in \mathbb{D}(G)$, infatti:

$$\begin{aligned}\big(\lambda(P)(f \circ L^x)\big)(g) &= \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big)(f \circ L^x)\big(g\exp(t_1X_1 + \dots + t_nX_n)\big)\Big\}_{t_1,\dots,t_n=0}\\&= \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big)f\big(xg\exp(t_1X_1 + \dots + t_nX_n)\big)\Big\}_{t_1,\dots,t_n=0}\\&= \big(\lambda(P)f\big)(xg) = \big(\lambda(P)f \circ L^x\big)(g)\end{aligned}$$

Inoltre, da (3.3) si vede direttamente che $\lambda(X_i) = X_i$, e quindi, per linearità, $\lambda(X) = X \ \forall X \in \mathfrak{g}$. Per induzione, dimostro che $\lambda(X^m) = X^m \ \forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall m \in N$. Dimostro innanzi tutto che:

$$(X^m f)(g) = \Big\{\frac{d^m}{dt^m} f\big(g\exp(tX)\big)\Big\}_{t=0}$$

Infatti, è vero per $m = 1$, e:

$$\begin{aligned}(X^{m+1}f)(g) = X(X^m f)(g) &= \Big\{\frac{d}{dt}(X^m f)\big(g\exp(tX)\big)\Big\}_{t=0}\\&= \Big\{\frac{d}{dt}\Big\{\frac{d^m}{ds^m} f\big(g\exp(tX)\exp(sX)\big)\Big\}_{s=0}\Big\}_{t=0}\\&= \Big\{\frac{d}{dt}\Big\{\frac{d^m}{ds^m} f\Big(g\exp\big((t+s)X\big)\Big)\Big\}_{s=0}\Big\}_{t=0}\end{aligned}$$

Ponendo $t + s = \tilde{t}$:

$$(X^{m+1}f)(g) = \Big\{\frac{d^{m+1}}{d\tilde{t}^{m+1}} f\big(g\exp(\tilde{t}X)\big)\Big\}_{\tilde{t}=0} = \Big\{\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} f\big(g\exp(tX)\big)\Big\}_{t=0}$$

Se $X = x_1X_1 + \cdots + x_nX_n$, viene:

$$(X^m f)(g) = \Big\{\frac{d^m}{dt^m} f\big(g\exp(tx_1X_1 + \cdots + tx_nX_n)\big)\Big\}_{t=0}$$

Ponendo allora $t_1 = tx_1, \dots, t_n = tx_n$, si ha:

$$\frac{d}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt_i} x_i$$

$$\frac{d^m}{dt^m} = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} \frac{d^n}{dt_{i_1}\cdots dt_{i_m}} x_{i_1}\cdots x_{i_m}$$

da cui:

$$(X^m f)(g) = \Big\{\Big(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} x_{i_1}\cdots x_{i_m}\frac{d^m}{dt_{i_1}\cdots dt_{i_m}}\Big) f\big(g\exp(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)\big)\Big\}_{t=0}$$

Ma $\lambda(X^m) = \lambda\big((x_1X_1+\cdots+x_nX_n)^m\big) = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} x_{i_1}\cdots x_{i_m}\lambda(X_{i_1}\cdots X_{i_m})$, e dunque, da (3.3):

$$(X^m f)(g) = \big(\lambda(X^m)f\big)(g)$$

da cui $\lambda(X^m) = X^m$.

Poiche nell'algebra dei polinomi le potenze X^m generano tutto il sottospazio dei polinomi omogenei di grado m, si ottiene che λ è definita per linearità su tutto $S(\mathfrak{g})$ dal fatto che $\lambda(X^m) = X^m$, in particolare non dipende dalla base scelta $X_1, \dots, X_m$.

λ è iniettiva. Infatti, sia $P \neq 0$: dimostro che $\lambda(P) \neq 0$. Ordiniamo P in maniera *lessicografica*, cioè in modo che il monomio $aX_1^{m_1}\cdots X_n^{m_n}$ preceda il monomio $bX_1^{s_1}\cdots X_n^{s_n}$ se $m_1 > s_1$, oppure $m_1 = s_1$ e $m_2 > s_2$, e così via. Sia $aX_1^{m_1}\cdots X_n^{m_n}$ il primo monomio rispetto a quest'ordine. Scegliamo poi un intorno dell'unità $U(1_G)$ immagine diffeomorfa tramite exp di un intorno $V(0) \subseteq \mathfrak{g}$, e costruiamo la funzione:

$$f : U(1_G) \to \mathbb{C}$$
$$f\big(\exp(t_1X_1 + \cdots t_nX_n)\big) = t_1^{m_1}\cdots t_n^{m_n}$$

f è chiaramente C^∞ in U, e dunque possiamo costruire una funzione $\tilde{f}$ C^∞ su tutto G che coincida con f in un intorno dell'unità U', tale che $\overline{U'} \subseteq U$. Allora:

$$\begin{aligned}
\big(\lambda(P)\tilde{f}\big)(1_G) &= \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big)\tilde{f}\big(\exp(t_1X_1 + \cdots t_nX_n)\big)\Big\}_{t_1,\dots,t_n=0} \\
&= \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big)t_1^{m_1}\cdots t_n^{m_n}\Big\}_{t_1,\dots,t_n=0} \\
&= \Big\{a\frac{\partial^{m_1}}{\partial t_1^{m_1}}\cdots\frac{\partial^{m_n}}{\partial t_n^{m_n}}\big(t_1^{m_1}\cdots t_n^{m_n}\big) + Q\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big)t_1^{m_1}\cdots t_n^{m_n}\Big\}_{t_1,\dots,t_n=0}
\end{aligned}$$

Ma $Q\big(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\big) t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$ si annulla, infatti, se $bX_1^{s_1} \cdots X_n^{s_n}$ è un monomio di Q, esiste almeno un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $s_i < m_i$, dunque $\partial_i^{s_i} t_i^{m_i} = ct^{m_i - s_i}$, con $m_i - s_i > 0$, e dunque, valutando in $t_i = 0$, $\partial_i^{s_i} t_i^{m_i}$ si annulla. Dunque:

$$\begin{aligned}\big(\lambda(P)\tilde{f}\big)(1_G) &= \Big\{a \frac{\partial^{m_1}}{\partial t_1^{m_1}} \cdots \frac{\partial^{m_n}}{\partial t_n^{m_n}} \big(t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}\big)\Big\}_{t_1, \ldots, t_n = 0} \\ &= a \cdot m_1! \cdots m_n! \neq 0\end{aligned}$$

Dunque $\lambda(P) \neq 0$.

Infine, λ è suriettiva. Infatti, se $D \in \mathbb{D}(G)$, essendo D un operatore differenziale ed essendo la mappa $\exp(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n) \to (t_1, \ldots, t_n)$ una carta locale, esiste un intorno $U(1_G)$ in cui, per un opportuno polinomio P e $\forall f \in C^\infty(G)$:

$$Df(1_G) = \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big) f\big(\exp(t_1 X_1 + \cdots t_n X_n)\big)\Big\}_{t_1, \ldots, t_n = 0}$$

Ma D è invariante a sinistra per G, dunque:

$$\begin{aligned}Df(g) &= \big(Df \circ L^g\big)(1_G) = D(f \circ L^g)(1_G) \\ &= \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big) f \circ L^g\big(\exp(t_1 X_1 + \cdots t_n X_n)\big)\Big\}_{t_1, \ldots, t_n = 0} \\ &= \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big) f\big(g \exp(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n)\big)\Big\}_{t_1, \ldots, t_n = 0} \\ &= \big(\lambda(P) f\big)(g)\end{aligned}$$

e dunque $\lambda(P) = D$. $\square$

Definizione 3.8 λ è detta *simmetrizzazione.*

Corollario 3.21 *Sia $P \in S(\mathfrak{g})$ e $g \in G$. Allora:*

$$Ad(g)\big[\lambda\big(P(X_1, \ldots, X_n)\big)\big] = \lambda\big(P(Ad(g)X_1, \ldots, Ad(g)X_r)\big)$$

Dimostrazione: Se $f \in C^\infty(G)$ si ha:

$$\begin{aligned}&Ad(g)\big[\lambda\big(P(X_1, \ldots, X_n)\big)\big] f(x) \\ &\quad = \lambda\big(P(X_1, \ldots, X_n)\big)^{R^g} f(x) \\ &\quad = \big[\lambda\big(P(X_1, \ldots, X_n)\big)(f \circ R^g)\big] \circ R^{g^{-1}}(x) \\ &\quad = \big[\lambda\big(P(X_1, \ldots, X_n)\big)(f \circ R^g)\big](xg) \\ &\quad = \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big) f\big(xg \exp(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n) g^{-1}\big)\Big\}_{t_1, \ldots, t_n = 0} \\ &\quad = \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big) f\big(x \exp\big(Ad(g)(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n)\big)\Big\}_{t_1, \ldots, t_n = 0} \\ &\quad = \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big) f\big(x \exp(t_1 Ad(g) X_1 + \cdots + t_n Ad(g) X_n)\big)\Big\}_{t_1, \ldots, t_n = 0}\end{aligned}$$

Sia $Ad(g)X_i = a_{1i}X_1 + \cdots + a_{ni}X_n$. Allora:

$$\begin{aligned}
&P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big) f\big(x \exp\big(t_1(a_{11}X_1 + \cdots + a_{n1}X_n) + \cdots + \\
&\qquad\qquad t_n(a_{1n}X_1 + \cdots + a_{nn}X_n)\big)\big)(0) \\
&\quad = P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big) f\big(x \exp\big((t_1 a_{11} + \cdots + t_n a_{1n})X_1 + \cdots + \\
&\qquad\qquad (t_1 a_{n1} + \cdots + t_n a_{nn})X_n\big)\big)(0)
\end{aligned}$$

Ponendo $y_i = t_1 a_{i1} + \cdots + t_n a_{in}$ si ha:

$$\begin{aligned}
&P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big) f\big(x \exp(y_1 X_1 + \cdots + y_n X_n)\big)(0) \\
&\quad = P\big(\tfrac{\partial}{\partial y_1}\tfrac{\partial y_1}{\partial t_1} + \cdots + \tfrac{\partial}{\partial y_n}\tfrac{\partial y_n}{\partial t_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial y_1}\tfrac{\partial y_1}{\partial t_n} + \cdots + \tfrac{\partial}{\partial y_n}\tfrac{\partial y_n}{\partial t_n}\big) f\big(\\
&\qquad\qquad x \exp(y_1 X_1 + \cdots + y_r X_r)\big)(0) \\
&\quad = P\big(\tfrac{\partial}{\partial y_1} a_{11} + \cdots + \tfrac{\partial}{\partial y_n} a_{n1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial y_1} a_{1n} + \cdots + \tfrac{\partial}{\partial y_n} a_{nn}\big) f\big(\\
&\qquad\qquad x \exp(y_1 X_1 + \cdots + y_n X_n)\big)(0)
\end{aligned}$$

Pongo $P\big(\frac{\partial}{\partial t_1} a_{11} + \cdots + \frac{\partial}{\partial t_n} a_{n1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_1} a_{1n} + \cdots + \frac{\partial}{\partial t_n} a_{nn}\big) = P\big(Ad(g)\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, Ad(g)\frac{\partial}{\partial t_n}\big)$. Dunque:

$$\begin{aligned}
&P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big) f\big(x \exp(t_1 Ad(g)X_1 + \cdots + t_n Ad(g)X_n)\big)(0) \\
&\quad = P\big(Ad(g)\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, Ad(g)\tfrac{\partial}{\partial t_n}\big) f\big(x \exp(t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n)\big)(0) \\
&Ad(g)\big[\lambda\big(P(X_1, \ldots, X_n)\big)\big] f(x) = \lambda\big[P\big(Ad(g)X_1, \ldots, Ad(g)X_n\big)\big] f(x)
\end{aligned}$$

□

Corollario 3.22 *Siano $X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{g}$ e sia S_p il gruppo simmetrico su p elementi. Allora:*

$$\lambda(X_1 \cdots X_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(p)}$$

Dimostrazione: Essendo $\lambda(X^m) = X^m \ \forall X \in \mathfrak{g}$, si ha:

$$\lambda\big((x_1 X_1 + \cdots + x_p X_p)^p\big) = (x_1 X_1 + \cdots + x_p X_p)^p$$

Se pensiamo i due membri dell'uguaglianza come polinomi in $x_1, \ldots, x_p$ a coefficienti in $\mathbb{D}(G)$, si ha che, applicando i coefficienti a una funzione f qualsiasi e valutando il tutto in un punto $g \in G$, si ottengono polinomi reali in $x_1, \ldots, x_n$: dunque vale il principio d'identità dei polinomi, e i coefficienti devono essere uguali in entrambi i membri. Valendo questo per ogni f e per ogni g, si ha che devono coincidere gli operatori. Possiamo allora uguagliare i coefficienti di $x_1 \cdots x_p$. Osservando che nel membro di sinistra gli X_i commutano in quanto appartengono a $S(\mathfrak{g})$, mentre nel membro di destra non commutano perchè sono pensati come operatori in $\mathbb{D}(G)$, si ha:

$$p!\lambda(X_1 \cdots X_p) = \sum_{\sigma \in S_n} X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(p)}$$

□

Teorema 3.23 *L'algebra $\mathbb{D}(G)$ è generata dagli operatori $X \in \mathfrak{g}$.*

Dimostrazione: λ è biunivoca, dunque $\mathbb{D}(G)$ coincide con l'immagine di $S(\mathfrak{g})$ tramite λ. Dal corollario 3.22 si ha banalmente la tesi. $\square$

Definizione 3.9 Sia G un gruppo di Lie e K un sottogruppo chiuso. Siano $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ le rispettive algebre di Lie. Lo spazio G/K è detto *riduttivo* se esiste un sottospazio $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}$ tale che:

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$;
- $Ad_G(K)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$.

Teorema 3.24 *Se K è compatto, G/K è riduttivo.*

Dimostrazione: Introduciamo su $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ il prodotto scalare:

$$(\!(x, y)\!) = \int_K \big(Ad(k)x, Ad(k)y\big)\, dk$$

dove $(\cdot, \cdot)$ è l'usuale prodotto scalare. Si verifica facilmente che anche $(\!(\cdot, \cdot)\!)$ è un prodotto scalare, con la proprietà che:

$$\big(\!\big(Ad(k)x, Ad(k)y\big)\!\big) = (\!(x, y)\!),\ \forall k \in K$$

Allora, chiamo $\mathfrak{m}$ il complemento ortogonale di $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ rispetto a $(\!(\cdot, \cdot)\!)$. Facile verificare $\mathfrak{m}$ che è $Ad(K)$ invariante: infatti, $x \in \mathfrak{m} \Leftrightarrow (\!(x, h)\!) = 0\,\forall h \in \mathfrak{h}$, e in tal caso:

$$(\!(Ad(k)x, h)\!) = (\!(x, Ad(k^{-1})h)\!) = (\!(x, \tilde{h})\!) = 0,\ \forall h \in \mathfrak{h}$$

$\square$

$\mathbb{D}_K(G)$ è la sottoalgebra di $\mathbb{D}(G)$ formata dagli operatori invarianti a destra per K. Chiaramente, questi operatori agiscono su funzioni $C^\infty(G)$ che possono anche non essere invarianti a destra per K. Tuttavia, se $f \in C^\infty_K(G)$ e $D \in \mathbb{D}_K(G)$, anche $Df \in C^\infty_K(G)$. Infatti:

$$Df(xk) = Df \circ R^k(x) = D(f \circ R^k)(x) = Df(x)$$

Dunque, un operatore $D \in \mathbb{D}_K(G)$ si può restringere a un operatore lineare, a supporto decrescente e invariante per traslazione sinistra, agente su $C^\infty_K(G)$.

Notazione: Sia $D \in \mathbb{D}_K(G)$. Indico con D_0 la restrizione di D a $C^\infty_K(G)$.

Notazione: Indico con $\mathbb{D}_K^K(G)$ l'algebra formata dalle restrizioni a $C_K^\infty(G)$ degli operatori di $\mathbb{D}_K(G)$.

Teorema 3.25 *Sia G/K riduttivo. Allora l'applicazione:*

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{D}_K^K(G) &\to \mathbb{D}(G/K)\\ \varphi(D_0) = \tilde{D}, &\quad \tilde{D}f = D_0(f\circ\pi)\circ\pi^{-1}\end{aligned}$$

è un isomorfismo di algebre.

Dimostrazione: Si ha che $\tilde{D} \in \mathbb{D}(G/K)$. Infatti, è chiaramente lineare. Se poi $xK \notin \operatorname{supp}(f)$, trovo un intorno $U(xK)$ tale che $f|_U = 0$. Allora, essendo π continua, $\pi^{-1}(U)$ è un intorno aperto di x in G e $f\circ\pi|_{\pi^{-1}(U)} = 0$, dunque $D_0(f\circ\pi)|_{\pi^{-1}(U)} = 0$, dunque $Df|_U = 0$, e quindi $xK \notin \operatorname{supp}(Df)$. Infine:

$$\begin{aligned}\tilde{D}(f\circ L^g) &= D_0(f\circ L^g\circ\pi)\circ\pi^{-1} = D_0(f\circ\pi\circ L^g)\circ\pi^{-1}\\ &= D(f\circ\pi)\circ L^g\circ\pi^{-1} = D(f\circ\pi)\circ\pi^{-1}\circ L^g\\ &= \tilde{D}(f)\circ L^g\end{aligned}$$

L'iniettività di φ è ovvia: se $\tilde{D} = \tilde{E}$, si ha che $\forall f \in C^\infty(G/K)$, $D_0(f\circ\pi) = E_0(f\circ\pi)$, e poiché ogni funzione in $C_K^\infty(G)$ è pari a $f\circ\pi$ per un'opportuna $f \in C^\infty(G/K)$, si ha che $D_0 = E_0$.

E' chiaro che φ è lineare, e conserva il prodotto in quanto:

$$\begin{aligned}(DE)^\sim f &= (D_0E_0)(f\circ\pi)\circ\pi^{-1} = D_0\big(E_0(f\circ\pi)\big)\circ\pi^{-1}\\ &= D_0\big(E_0(f\circ\pi)\circ\pi^{-1}\circ\pi\big)\circ\pi^{-1}\\ &= D_0\big(\tilde{E}f\circ\pi\big)\circ\pi^{-1} = \tilde{D}(\tilde{E}f) = (\tilde{D}\tilde{E})f\end{aligned}$$

Rimane da dimostrare la suriettività. Sia $E \in \mathbb{D}(G/K)$. Sviluppando E in un intorno di K in G/K e valutando in K, si trova un polinomio P tale che, per $f \in C^\infty(G/K)$:

$$Ef(K) = P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)f\big[\pi\big(\exp(x_1X_1+\dots+x_rX_r)\big)\big](0)$$

Inoltre, essendo E invariante per traslazione sinistra:

$$\begin{aligned}Ef(gK) &= Ef\circ L^g(K) = E(f\circ L^g)(K)\\ &= P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)f\circ L^g\big[\pi\big(\exp(x_1X_1+\dots+x_rX_r)\big)\big](0)\\ &= P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)f\big[\pi\big(g\exp(x_1X_1+\dots+x_rX_r)\big)\big](0)\end{aligned}$$

Allora, per $k \in K$:

$$Ef(gK) = Ef(gkK) = P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1},\dots,\tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)f\big[\pi\big(gk\exp(x_1X_1+\dots+x_rX_r)\big)\big](0)$$

Chiaramente $\pi(x) = \pi(xk)$, dunque:

$$\begin{aligned}
Ef(gK) &= P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big) f\big[\pi\big(gk\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)k^{-1}\big)\big](0) \\
&= P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big) f\big[\pi\big(g\exp\big(Ad(k)(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)\big)\big)\big](0) \\
&= P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big) f\big[\pi\big(g\exp\big(x_1Ad(k)X_1 + \cdots + x_rAd(k)X_r\big)\big)\big](0)
\end{aligned}$$

Esattamente come nel corollario 3.21, si dimostra che:

$$\begin{aligned}
&P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big) f\big[\pi\big(g\exp\big(x_1Ad(k)X_1 + \cdots + x_rAd(k)X_r\big)\big)\big](0) \\
&\qquad = P\big(Ad(k)\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, Ad(k)\tfrac{\partial}{\partial x_r}\big) f\big[\pi\big(g\exp\big(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r\big)\big)\big](0)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Sia $S(\mathfrak{m})$ l'algebra simmetrica su $\mathfrak{m}$: $S(\mathfrak{m})$ può essere identificata all'algebra dei polinomi in $X_1, \dots, X_r$. Su un opportuno sottoinsieme $A \subseteq S(\mathfrak{m})$ è definita l'applicazione:

$$\begin{aligned}
&\phi : A \subseteq S(\mathfrak{m}) \to \mathbb{D}(G/K) \\
&\quad \big[\phi\big(P(X_1, \dots, X_r)\big) f\big](g) \\
&\qquad = \Big\{P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial t_n}\big) f\big(\pi\big(g\exp(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)\big)\big)\Big\}_{t_1,\dots,t_n=0}
\end{aligned}$$

Si vede che ϕ è iniettiva, seguendo la stessa dimostrazione utilizzata per λ nel teorema 3.20. L'equazione 3.4 diventa allora:

$$\phi\big(P(X_1, \dots, X_r)\big) = \phi\big(P(Ad(k)X_1, \dots, Ad(k)X_r)\big) \quad \forall k \in K$$

da cui, per l'iniettività di ϕ:

$$P(X_1, \dots, X_r) = P(Ad(k)X_1, \dots, Ad(k)X_r) \quad \forall k \in K$$

Considero allora l'operatore D:

$$Df(g) = P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big) f\big(g\exp(x_1X_1 + \cdots + x_nX_n)\big)(0)$$

$D \in \mathbb{D}(G)$, infatti, se considero $\tilde{P} \in S(\mathfrak{g})$, $\tilde{P}(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n) = P(X_1, \dots, X_r)$, ho che $D = \lambda(\tilde{P})$. Inoltre, $D \in \mathbb{D}_K(G)$. Infatti:

$$\begin{aligned}
D^{R^k} f(g) &= D(f \circ R^k) \circ R^{k^{-1}}(g) = \big(D(f \circ R^k)\big)(gk) \\
&= P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big) f \circ R^k\big(gk\exp(x_1X_1 + \cdots + x_nX_n)\big)(0) \\
&= P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big) f\big(gk\exp(x_1X_1 + \cdots + x_nX_n)k^{-1}\big)(0) \\
&= P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big) f\big(\exp\big(gAd(k)(x_1X_1 + \cdots + x_nX_n)\big)\big)(0) \\
&= P\big(Ad(k)\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, Ad(k)\tfrac{\partial}{\partial x_r}\big) f\big(\exp(gx_1X_1 + \cdots + x_nX_n)\big)(0)
\end{aligned}$$

Ma P è $Ad(k)$-invariante, dunque $D^{R^k} = D$. Infine, $\varphi(D_0) = E$, infatti:

$$\begin{aligned}\big(D(f \circ \pi) \circ \pi^{-1}\big)&\big[\pi\big(g \exp(x_1 X_1 + \cdots + x_r X_r)\big)\big] \\ &= D(f \circ \pi)\big(g \exp(x_1 X_1 + \cdots + x_r X_r)\big) \\ &= P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big) f \circ \pi\big(g \exp(x_1 X_1 + \cdots + x_r X_r)\big)(0) \\ &= P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big) f\big[\pi\big(g \exp(x_1 X_1 + \cdots + x_r X_r)\big)\big](0) \\ &= Ef\big[\pi\big(g \exp(x_1 X_1 + \cdots + x_r X_r)\big)\big]\end{aligned}$$

□

Notazione: Indico con $\mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$ il sottospazio di $\mathbb{D}(G)$ generato dagli operatori del tipo DH con $D \in \mathbb{D}(G)$ e $H \in \mathfrak{h}$.

Notazione: Per $r \in N$, sia $S^r(\mathfrak{g})$ il sottospazio di $S(\mathfrak{g})$ formato dai tensori di grado r: fissata una base $X_1, \ldots, X_n$ di $\mathfrak{g}$, $S^r(\mathfrak{g})$ si identifica con i polinomi in $X_1, \ldots, X_n$ *omogenei* di grado r. Allora, per $d \in N$ pongo:

$$D^d(G) = \lambda\Bigg(\sum_{i \le d} S^i(\mathfrak{g})\Bigg)$$

Lemma 3.26 *Dati $Y_1, \ldots, Y_d \in \mathfrak{g}$, sia $D = Y_1 \cdots Y_d$. Allora $D \in D^d(G)$.*

Dimostrazione: Lo dimostro per induzione su d. Se $d = 1$ è ovvio: $Y_1 = \lambda(Y_1)$. Per $d = 2$, si ha:

$$\lambda\big(Y_1 Y_2 + \tfrac{1}{2}[Y_1, Y_2]\big) = \tfrac{1}{2}(Y_1 Y_2 + Y_2 Y_1) + \tfrac{1}{2}(Y_1 Y_2 - Y_2 Y_1) = Y_1 Y_2$$

Supponendo quindi che la tesi sia vera per $d - 1$, sia $D = Y_1 \cdots Y_d$. Allora:

$$\lambda(Y_1 \cdots Y_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in S_d} Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(d)}$$

Fissato $\sigma \in S_d$, considero:

$$Y_1 \cdots Y_d + Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(d)}$$

Poichè S_d è generato dagli scambi di elementi successivi, $S_d =< (1,2), (2,3), \ldots, (d-1, d) >$, si ha che $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_n$ con $\tau_i = (j_i, j_i + 1)$. Quindi:

$$\begin{aligned}Y_1 \cdots Y_d + Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(d)} &= Y_1 \cdots Y_d + Y_{\tau_1(1)} \cdots Y_{\tau_1(d)} + \\ &\sum_{k=1}^{n-1} -Y_{\tau_1 \cdots \tau_k(1)} \cdots Y_{\tau_1 \cdots \tau_k(d)} + Y_{\tau_1 \cdots \tau_k \tau_{k+1}(1)} \cdots Y_{\tau_1 \cdots \tau_k \tau_{k+1}(d)}\end{aligned}$$

Gli addendi $-Y_{\tau_1\cdots\tau_k(1)}\cdots Y_{\tau_1\cdots\tau_k(d)}+Y_{\tau_1\cdots\tau_k\tau_{k+1}(1)}\cdots Y_{\tau_1\cdots\tau_k\tau_{k+1}(d)}$ sono del tipo:

$$-Y_1\cdots Y_iY_{i+1}\cdots Y_d+Y_1\cdots Y_{i+1}Y_i\cdots Y_d=Y_1\cdots[Y_{i+1},Y_i]\cdots Y_d$$

Allora, per l'ipotesi induttiva, trovo un polinomio Q_k *di grado* $d-1$ tale che $\lambda(Q_k)=-Y_1\cdots[Y_{i+1},Y_i]\cdots Y_d$. Sommando i Q_k, ottengo un polinomio Q di grado $d-1$ tale che:

$$\lambda(Q)=-\sum_{k=1}^{n-1}-Y_{\tau_1\cdots\tau_k(1)}\cdots Y_{\tau_1\cdots\tau_k(d)}+Y_{\tau_1\cdots\tau_k\tau_{k+1}(1)}\cdots Y_{\tau_1\cdots\tau_k\tau_{k+1}(d)}$$

Per quanto riguarda $Y_1\cdots Y_d+Y_{\tau_1(1)}\cdots Y_{\tau_1(d)}$, esso è del tipo:

$$Y_1\cdots Y_iY_{i+1}\cdots Y_d+Y_1\cdots Y_{i+1}Y_i\cdots Y_d$$

Ancora per l'ipotesi induttiva, trovo un polinomio R di grado al più $d-1$ tale che:

$$\lambda(R)=Y_1\cdots[Y_i,Y_{i+1}]\cdots Y_d$$

da cui:

$$Y_1\cdots Y_iY_{i+1}\cdots Y_d+Y_1\cdots Y_{i+1}Y_i\cdots Y_d=2(Y_1\cdots Y_d)-\lambda(R)$$

In totale, $P_\sigma=Q+R$ è un polinomio di grado $d-1$ tale che:

$$\begin{aligned}Y_1\cdots Y_d+Y_{\sigma(1)}\cdots Y_{\sigma(d)}&=2Y_1\cdots Y_d-\lambda(P_\sigma)\\ Y_{\sigma(1)}\cdots Y_{\sigma(d)}&=Y_1\cdots Y_d-\lambda(P_\sigma)\end{aligned}$$

dunque:

$$\begin{aligned}\lambda(Y_1\cdots Y_d)&=\frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in S_d}Y_1\cdots Y_d-\lambda(P_\sigma)\\ \lambda(Y_1\cdots Y_d)&=Y_1\cdots Y_d-\frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in S_d}\lambda(P_\sigma)\end{aligned}$$

Allora $P=\frac{1}{d!}\sum_{\sigma\in S_d}\lambda(P_\sigma)$ è il polinomio di grado $d-1$ tale che:

$$\lambda\big(Y_1\cdots Y_d+P(Y_1,\ldots,Y_d)\big)=Y_1\cdots Y_d$$

□

Teorema 3.27 $\mathbb{D}(G)$ *si decompone nel seguente modo:*

$$\mathbb{D}(G)=\mathbb{D}(G)\mathfrak{h}\oplus\lambda(S(\mathfrak{m}))$$

Inoltre, se $D\in D^d(G)$ *si decompone come* $D=D_1+D_2$*, allora* $D_1,D_2\in D^d(G)$*.*

Dimostrazione: Utilizzando la simmetrizzazione λ, bisogna dimostrare che, $\forall P \in S(\mathfrak{g})$, esiste un polinomio $Q \in S(\mathfrak{m})$ di grado minore o uguale al grado di P, tale che $\lambda(P-Q) \in \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$. (Rimane poi da dimostrare che la somma è diretta.) Lo dimostro per induzione sul grado di P.

Sia $X_1, .., X_r, X_{r+1}, \dots, X_n$ una base di $\mathfrak{g}$ tale che $X_1, \dots, X_r$ sia una base di $\mathfrak{m}$ e $X_{r+1}, \dots, X_n$ una base di $\mathfrak{h}$. Allora, se $deg(P) = 1$, dev'essere $P = a_1X_1 + \dots + a_rX_r + a_{r+1}X_{r+1} + \dots + a_nX_n + a_{n+1}$, e dunque basta considerare $Q = a_1X_1 + \dots + a_rX_r$.

Suppongo quindi vera la tesi per $deg(P) < d$, e la dimostro per $deg(P) = d$. In realtà, posso supporre P *omogeneo*, in quanto per i monomi di grado inferiore sfrutto l'ipotesi induttiva e la linearità di λ. Inoltre, ancora per la linearità di λ, posso dimostrare la tesi per ciascun monomio di P. Dunque, posso supporre $P = X_1^{d_1} \cdots X_r^{d_r} X_{r+1}^{d_{r+1}} \cdots X_n^{d_n}$, $d_1 + \dots + d_n = d$. Se $d_{r+1} = \dots = d_n = 0$, si ha banalmente la tesi per $Q = P$. In caso contrario, sviluppando le potenze posso pore $P = Y_1 \cdots Y_t$, in modo che $\exists \alpha \in \{1, \dots, t\} : Y_\alpha \in \mathfrak{h}$. Per il corollario 3.22:

$$\lambda(P) = \frac{1}{t!} \sum_{\sigma \in S_t} Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(t)}$$

Considero:

$$Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(t)} - Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(\alpha-1)} Y_{\sigma(\alpha+1)} \cdots Y_{\sigma(t)} Y_{\sigma(\alpha)}$$

Lo scambio $(\alpha, t) \in S_t$ si può esprimere come $(\alpha, t) = (\alpha, \alpha+1)(\alpha+1, \alpha+2) \cdots (t-1, t) = \tau_\alpha \cdots \tau_{t-1}$, con $\tau_i = (i, i+1)$. Quindi:

$$Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(t)} - Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(\alpha-1)} Y_{\sigma(\alpha+1)} \cdots Y_{\sigma(t)} Y_{\sigma(\alpha)}$$
$$\sum_{k=-1}^{t-1-\alpha} Y_{\tau_\alpha \cdots \tau_{\alpha+k}(1)} \cdots Y_{\tau_\alpha \cdots \tau_{\alpha+k}(t)} - Y_{\tau_\alpha \cdots \tau_{\alpha+k}\tau_{\alpha+k+1}(1)} \cdots Y_{\tau_\alpha \cdots \tau_{\alpha+k}\tau_{\alpha+k+1}(d)}$$

dove per $k = -1$ si intende che $\tau_\alpha \cdots \tau_{\alpha+k}$ è l'identità. Ciascun addendo della somma è del tipo:

$$Y_1 \cdots Y_i Y_{i+1} \cdots Y_t - Y_1 \cdots Y_{i+1} Y_i \cdots Y_t = Y_1 \cdots [Y_i Y_{i+1}] \cdots Y_t$$

e quindi, per il lemma 3.26, $Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(t)} - Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(\alpha-1)} Y_{\sigma(\alpha+1)} \cdots Y_{\sigma(t)} Y_{\sigma(\alpha)} \in D^{d-1}(G)$, e, essendo per costruzione $Y_{\sigma(\alpha)} \in \mathfrak{h}$, si ha $Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(\alpha-1)} Y_{\sigma(\alpha+1)} \cdots Y_{\sigma(t)} Y_{\sigma(\alpha)} \in \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$. Quindi:

$$Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(t)} = D_\sigma + E_\sigma, \quad D_\sigma \in \mathbb{D}(G)\mathfrak{h},\ E_\sigma \in D^{d-1}(G)$$

Sommano su tutti i σ si ottiene:

$$\lambda(P) - D = E, \quad D \in \mathbb{D}(G)\mathfrak{h},\ E \in D^{d-1}(G)$$

Essendo $E \in D^{d-1}(G)$, per l'ipotesi induttiva esiste $Q \in S(\mathfrak{m})$ tale che $\lambda(Q) - E \in \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$, e dunque $\lambda(P-Q) \in \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$.

Rimane da dimostrare che la somma è diretta: suppongo allora $P \in S(\mathfrak{m})$, $P \neq 0$, e dimostro che $\lambda(P) \notin \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$. Essendo $P \neq 0$, posso costruire $\phi \in C^\infty(R^r)$ tale che:

$$\big[P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)\phi(x_1, \dots, x_r)\big](0) \neq 0$$

Infatti, ordino P in maniera *lessicografica*, cioè in modo che il monomio $aX_1^{m_1} \cdots X_r^{m_r}$ preceda il monomio $bX_1^{s_1} \cdots X_r^{s_r}$ se $m_1 > s_1$, oppure $m_1 = s_1$ e $m_2 > s_2$, e così via. Sia $aX_1^{m_1} \cdots X_r^{m_r}$ il primo monomio rispetto a quest'ordine. Sia $U(0) \subseteq R^r$ un intorno dell'origine e sia:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} : U(0) &\to \mathbb{C} \\ \tilde{\phi}(x_1, \dots, x_r) &= x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}\end{aligned}$$

Possiamo costruire una funzione $\phi \in C^\infty(R^r)$ che coincida con $\tilde{\phi}$ in un intorno dell'origine u', tale che $\overline{u'} \subseteq U$. Allora:

$$\begin{aligned}&\big[P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)\phi(x_1, \dots, x_r)\big](0) \\ &\qquad \Big\{a\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \cdots \frac{\partial^{m_r}}{\partial x_r^{m_r}}\big(x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}\big) + Q\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)x_1^{m1} \cdots x_r^{m_r}\Big\}_{x_1, \dots, x_n = 0}\end{aligned}$$

Ma $Q\big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}\big)x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}$ si annulla, infatti, se $bX_1^{s_1} \cdots X_r^{s_r}$ è un monomio di Q, esiste almeno un $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $s_i < m_i$, dunque $\partial_i^{s_i} x_i^{m_i} = cx^{m_i - s_i}$, con $m_i - s_i > 0$, e dunque, valutando in $x_i = 0$, $\partial_i^{s_i} x_i^{m_i}$ si annulla. Dunque:

$$\big[P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)\phi(x_1, \dots, x_r)\big](0) = a \cdot m_1! \cdots m_r! \neq 0$$

Sia allora $f \in C^\infty(G/K)$ definita, in un intorno di $H \in G/K$, da:

$$f\big(\pi\big(\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)\big)\big) = \phi(x_1, \dots, x_n)$$

ed estesa in maniera C^∞ su tutto G/K. Allora:

$$\begin{aligned}&\big(\lambda(P)(f \circ \pi)\big)(1_G) \\ &\qquad = \big[P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)f \circ \pi\big(\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r + x_{r+1}X_{r+1} + x_nX_n)\big)\big](0) \\ &\qquad = \big[P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)f \circ \pi\big(\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)\big)\big](0) \\ &\qquad = \big[P\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)\phi(x_1, \dots, x_r)\big](0) \neq 0\end{aligned}$$

Allora $\lambda(P) \notin \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$, in quanto, se $H \in \mathfrak{h}$, $H(f \circ \pi) = 0$ essendo H nello spazio tangente a K nell'unità ed essendo $f \circ \pi$ costante su K. □

Notazione: Indico con $I(\mathfrak{m})$ il sottospazio di $S(\mathfrak{m})$ formato dai polinomi $Ad_G(K)$-invarianti, cioè tali che $\forall k \in K$:

$$P(X_1, \dots, X_r) = P\big(Ad(k)X_1, \dots, Ad(k)X_r\big)$$

Corollario 3.28 *Si ha:*

$$\mathbb{D}_K(G) = \big(\mathbb{D}_K(G) \cap \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}\big) \oplus \lambda\big(I(\mathfrak{m})\big)$$

Dimostrazione: $\mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$ e $\lambda(S(\mathfrak{m}))$ sono entrambi stabili per $Ad_G(K)$: infatti, se $D = EH$ con $H \in \mathfrak{h}$ si ha:

$$Ad(k)D = D^{R^{k^{-1}}} = E^{R^{k^{-1}}} H^{R^{k^{-1}}} = E^{R^{k^{-1}}} \cdot Ad(k)(H) \in \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$$

Se poi $P \in S(\mathfrak{m})$, essendo $Ad(k)\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, per il corollario 3.21 si ha:

$$Ad(k)\big[\lambda\big(P(X_1, \dots, X_r)\big)\big] = \lambda\big[P\big(Ad(k)X_1, \dots, Ad(k)X_r\big)\big] \in S(\mathfrak{m})$$

Se $D \in \mathbb{D}_K(G)$, essendo $\mathbb{D}_K(G) \subseteq \mathbb{D}(G)$ si ha $D = D_1 + D_2$, con $D_1 \in \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$ e $D_2 \in \lambda(S(\mathfrak{m}))$ e $\forall k \in K$:

$$D = D^{R^{k^{-1}}} = Ad(k)D = Ad(k)D_1 + Ad(k)D_2$$

Ma $Ad(k)D_1 \in \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$ e $Ad(k)D_2 \in \lambda(S(\mathfrak{m}))$, e dunque, per l'unicità della decomposizione, $Ad(k)D_1 = D_1$ e $Ad(k)D_2 = D_2$, cioè $D_1, D_2 \in \mathbb{D}_K(G)$. Allora $D_1 \in \mathbb{D}_K(G) \cap \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$ e, se $D_2 = \lambda(P)$, si ha:

$$\lambda\big(P(X_1, \dots, X_r)\big) = Ad(k)\big[\lambda\big(P(X_1, \dots, X_r)\big)\big] = \lambda\big[P\big(Ad(k)X_1, \dots, Ad(k)X_r\big)\big]$$

e quindi, per l'iniettività di λ, $P \in I(\mathfrak{m})$. $\square$

Teorema 3.29 *L'applicazione:*

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{D}_K(G) &\to \mathbb{D}(G/K) \\ \psi(D) = \tilde{D}, &\quad \tilde{D}f = D(f \circ \pi) \circ \pi^{-1} \end{aligned}$$

è un omomorfismo di algebre. Il suo Ker è:

$$\mathbb{D}_K(G) \cap \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$$

e dunque si ha l'isomorfismo:

$$\mathbb{D}(G/K) \cong \mathbb{D}_K^K(G) \cong \frac{\mathbb{D}_K(G)}{\mathbb{D}_K(G) \cap \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}}$$

Dimostrazione: Si dimostra come nel teorema 3.25 che ψ è ben definita ed è un omomorfismo. Dal teorema 3.25 segue anche che ψ è surriettiva, in quanto $\psi(D) = \varphi(D_0)$, e φ è suriettiva. Rimane solo da dimostrare che $Ker(\psi) = \mathbb{D}_K(G) \cap \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$.

Se $D \in \mathbb{D}_K(G) \cap \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$, è chiaro che $\psi(D) = 0$, in quando $D(f \circ \pi) = EH(f \circ \pi)$ con $H \in \mathfrak{h}$, ma, essendo $f \circ \pi$ costante su K, si ha $H(f \circ \pi) = 0$. Sia $D \in \mathbb{D}_K(G)$ tale che $\psi(D) = 0$. Per il corollario 3.28, $D = D_1 + D_2$ con $D_1 \in \mathbb{D}_K(G) \cap \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}$ e $D_2 \in \lambda(I(\mathfrak{m}))$. Allora $\psi(D_1) = 0$, dunque $\psi(D_2) = 0$. Se dimostro che $D_2 = 0$ ho concluso. Se così non fosse, come ho dimostrato in precedenza potrei trovare una funzione $f \in C^\infty(G/K)$ tale che $D_2(f \circ \pi) \neq 0$, e dunque si avrebbe $\psi(D_2) \neq 0$. □

Teorema 3.30 *Sia G/H riduttivo. Allora l'applicazione lineare:*

$$\phi : I(\mathfrak{m}) \to \mathbb{D}(G/K)$$
$$\phi = \lambda|_{I(\mathfrak{m})} \circ \psi$$

è biunivoca. In paricolare, si ha:

$$\phi\big(P(X_1, \ldots, X_r)\big) f(gK) = \Big\{ P\big(\tfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial t_r}\big) f\big[\pi\big(g \exp(t_1 X_1 + \cdots + t_r X_r)\big)\big] \Big\}_{t_1, \ldots, t_r = 0}$$

e dunque:

$$\phi(P)f = \lambda(P)(f \circ \pi) \circ \pi^{-1}$$
$$\phi(P) = \lambda(P)^\pi$$

Dimostrazione: Segue banalmente dal teorema 3.29 e dal corollario 3.28. La notazione $\lambda(P)^\pi$ può sembrare scorretta in quanto π non è un diffeomorfismo e dunque π^{-1} non è ben definito. Tuttavia, si può estendere a questo caso la solita notazione in quanto il risultato di $\lambda(P)^\pi(gK)$ è indipendente dalla scelta del rappresentante di $\pi^{-1}(gK)$. □

Lemma 3.31 *Sia $P \in I(\mathfrak{m})$. Allora ogni sua componente omogenea appartiene a $I(\mathfrak{m})$.*

Dimostrazione: Sia $\deg(P) = n$ e sia $P = \sum_{i=0}^n P_i$, con P_i componente omogenea di grado i. Allora, $\forall k \in K$:

$$\sum_{i=0}^n P_i(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=0}^n P_i\big(Ad(k)X_1, \ldots, Ad(k)X_n\big)$$

Essendo $Ad(k)$ lineare, $P_i\big(Ad(k)X_1, \ldots, Ad(k)X_n\big)$ è ancora omogenea di grado i. Dunque, essendo uguali i due polinomi, dev'essere, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$P_i(X_1, \ldots, X_n) = P_i\big(Ad(k)X_1, \ldots, Ad(k)X_n\big)$$

ovvero $P_i \in I(\mathfrak{m})$. □

Teorema 3.32 *$I(\mathfrak{m})$, e quindi $\mathbb{D}(G/K)$, sono algebre finitamente generate su R.*

Dimostrazione: Sia $I_0(\mathfrak{m}) \subseteq I(\mathfrak{m})$ l'insieme dei polinomi $Ad(K)$-invarianti con termine noto nullo, e sia $J \subseteq S(\mathfrak{m})$ l'ideale generato da $I_0(\mathfrak{m})$ (è necessario chiedere che il termine noto sia nullo, altrimenti l'ideale generato sarebbe tutta $S(\mathfrak{m})$). Per il teorema della base di Hilbert J è finitamente generato: sia quindi $J = (J_1, \dots, J_s)$. Allora, $\forall P \in J$, si ha $P = P_1 J_1 + \cdots + P_s J_s$ per opportuni $P_1, \dots, P_s \in S(\mathfrak{m})$. Ma, essendo J generato da $I_0(\mathfrak{m})$, si ha che i polinomi J_i sono a loro volta del tipo $J_i = Q_1^i I_1^i + \cdots + Q_{t_i}^i I_{t_i}^i$, con $I_k \in I_0(\mathfrak{m})$ $\forall k$, e dunque si ha che, $\forall P \in J$, $P = R_1 I_1 + \cdots + R_t I_t$ con $I_i \in I_0(\mathfrak{m})$. Posso infine scomporre i polinomi I_i nelle loro componenti omogenee, che per il lemma 3.31 appartengono ancora a $I_0(\mathfrak{m})$, ottenendo così:

$$J = (I_1, \dots, I_s), \quad I_i \in I_0(\mathfrak{m}) \text{ omogeneo}$$

Sia $I \in (\mathfrak{m})$ *omogeneo*: dimostro per induzione sul grado di I che $I \in K[I_1, \dots, I_s]$, risultato che si estende banalmente ad ogni $\tilde{I} \in I(\mathfrak{m})$. Se $\deg(I) = 0$ la tesi è banale. Sia dunque $\deg(I) > 0$, quindi $I \in I_0(\mathfrak{m})$.

Essendo $I \in J$, si ha che $I = P_1 I_1 + \cdots + P_s I_s$. Scomponendo i polinomi P_i nelle loro componenti omogenee, rimarranno soltanto addendi omogenei dello stesso grado di I, dunque:

$$I = Q_1 I_1 + \cdots + Q_s I_s, \quad Q_i, I_i \text{ omogenei } \forall i \in \{1, \dots, s\}$$

con $\deg(Q_i) = \deg(I) - \deg(I_i)$. Allora si ha:

$$\int_K Ad(k) I \, dk = \int_K \Big(Ad(k)Q_1 \cdot Ad(k)I_1 + \cdots + Ad(k)Q_s \cdot Ad(k)I_s \Big) \, dk$$
$$I = \left(\int_K Ad(k)Q_1 \, dk \right) I_1 + \cdots + \left(\int_K Ad(k)Q_s \, dk \right) I_s$$

Ma $\int_K Ad(k)Q_i \, dk \in I_0(\mathfrak{m})$ ed è omogeneo di grado inferiore a quello di I. Per l'ipotesi induttiva, $\int_K Ad(k)Q_i \, dk \in K[I_1, \dots, I_s]$, da cui si ha la tesi.

La mappa ϕ non è in generale moltiplicativa, per cui non si può immediatamente dedurre che anche $\mathbb{D}(G/K)$ è finitamente generata dal fatto che lo è $I(\mathfrak{m})$. Tuttavia, si può dimostrare nel modo seguente.

Consideriamo la simmetrizzazione λ. Si ha:

$$\lambda(X_1 \cdots X_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(p)}$$

$$\lambda(X_1 \cdots X_p) - X_1 \cdots X_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \big(X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(p)} - X_1 \cdots X_p \big)$$

Essendo S_p generato dagli scambi di elementi successivi, $S_p =< (1,2),(2,3),\dots,(p-1,p) >$ si ha che $\forall \sigma \in S_p$, $\sigma = \tau_{i_1}\cdots\tau_{i_n}$ con $\tau_i = (i,i+1)$. Dunque:

$$\begin{aligned}
&X_{\sigma(1)}\cdots X_{\sigma(p)} - X_1\cdots X_p \\
&\qquad = X_{\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_n}(1)}\cdots X_{\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_n}(p)} - X_1\cdots X_p \\
&\qquad = \sum_{j=0}^{n-1} X_{\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_{n-j}}(1)}\cdots X_{\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_{n-j}}(p)} - X_{\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_{n-j-1}}(1)}\cdots X_{\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_{n-j-1}}(p)}
\end{aligned}$$

Ciascun addendo dell'ultima somma è del tipo:

$$X_1\cdots X_jX_{j+1}\cdots X_n - X_1\cdots X_{j+1}X_j\cdots X_n = X_1\cdots[X_j,X_{j+1}]\cdots X_n$$

e dunque, per il teorema 3.26, è immagine tramite λ di un polinomio di grado inferiore a n. Ragionando allo stesso modo per ogni $\sigma \in S_p$ si ottiene:

$$\lambda(X_1\cdots X_p) - X_1\cdots X_p = \lambda(Q), \quad \deg(Q) < p$$

da cui:

$$\begin{aligned}
&\lambda(X_1\cdots X_p)^\pi = (X_1\cdots X_p)^\pi + \lambda(Q)^\pi \\
&\phi(X_1\cdots X_p) = (X_1\cdots X_p)^\pi + \phi(Q), \quad \deg(Q) < p
\end{aligned}$$

Dati due polinomi $P_1, P_2 \in I(\mathfrak{m})$, siano $\tilde{P}_1$ e $\tilde{P}_2$ le componenti omogenee di grado massimo. Chiaramente, la componente di grado massimo di P_1P_2 sarà $\tilde{P}_1\tilde{P}_2$. Per qunato appena dimostrato, dev'essere:

$$\phi(\tilde{P}_i) = \tilde{P}_i^\pi + \phi(Q_i), \quad \deg(Q_i) < \deg(P_i),\ i = 1,2$$

Allora:

$$\begin{aligned}
&\phi(P_1) = \tilde{P}_1^\pi + \phi(R_1), \quad \deg(R_1) < \deg(P_1) \\
&\phi(P_2) = \tilde{P}_2^\pi + \phi(R_2), \quad \deg(R_2) < \deg(P_2) \\
&\phi(P_1P_2) = (\tilde{P}_1\tilde{P}_2)^\pi + \phi(R_3), \quad \deg(R_3) < \deg(P_1) + \deg(P_2)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\phi(P_1P_2) = \phi(P_1)\phi(P_2) + \phi(Q), \quad \deg(Q) < \deg(P_1) + \deg(P_2)$$

Adesso si può dimostrare che $\mathbb{D}(G/K)$ è generata da $\phi(I_1),\dots,\phi(I_s)$. Infatti, sia $\phi(P) \in \mathbb{D}(G/K)$: se $\deg(P) = 0$ è ovvio che $\phi(P) \in K[\phi(I_1),\dots,\phi(I_s)]$. Se $\deg(P) = d+1$, allora:

$$\begin{aligned}
&P = \sum_{i_1,\dots,i_s} a_{i_1,\dots,i_s} I_1^{i_1}\cdots I_s^{i_s} \\
&\phi(P) = \sum_{i_1,\dots,i_s} a_{i_1,\dots,i_s}\phi(I_1)^{i_1}\cdots\phi(I_s)^{i_s} + \phi(Q), \quad \deg(Q) \le d
\end{aligned}$$

da cui si ha la tesi per induzione. □

Capitolo 4

Coppie di Gelfand su gruppi di Lie

4.1 Caratterizzazione differenziale delle coppie di Gelfand

Notazione: Indico con $C_K(G)$ l'algebra delle funzioni continue su G invarianti a destra per K ($f(xk) = f(x), \forall k \in K, x \in G$).

Notazione: Indico con M^x l'operatore:

$$M^x : C(G) \to C_K(G)$$
$$(M^x f)(g) = \int_K f(gkx)\, dk$$

Sia poi $X \in \mathfrak{g}$, $m \in N$. Indico con $D_m^X \in \mathbb{D}_K(G)$ l'operatore:

$$D_m^X = \int_K (X^m)^{R^{k^{-1}}}\, dk$$

Lemma 4.1 *M^x e D_m^X sono ben definiti. Inoltre, se $f \in C_K(G)$ è* analitica, *$\forall g \in G$ esistono un intorno $V(g)$ e $\varepsilon > 0$ tali che, per $\|X\| < \varepsilon$ e $x \in V$, si ha:*

$$M^{\exp(X)} f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D_m^X f(x)$$

Dimostrazione: M^x è ben definito, infatti per il teorema 3.14 manda funzioni continue in funzioni continue e, essendo K compatto e quindi unimodulare, $(M^x f)(gk) = (M^x f)(g)$, $\forall k \in K$. Per il teorema 3.14, $D_m^X \in \mathbb{D}_K(G)$.

Essendo K compatto, per il teorema 3.24 trovo $\mathfrak{p}$ tale che:

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$;

- $Ad_G(K)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$.

Su $\mathfrak{g}$ posso introdurre una metrica invariante per $Ad_G(K)$: essendo $Ad_G(K)$ compatto, fisso un prodotto scalare $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ e pongo:

$$\langle X, Y \rangle = \int_K \langle\!\langle Ad(k)X, Ad(k)Y \rangle\!\rangle \, dk$$

Sia $X_1, \ldots, X_r$ una base *ortonormale* di $\mathfrak{p}$. Sia $p \in G/K$, e sia (V, σ) una sezione in p, con $B = \sigma(V)$ e $\tilde{p} = \sigma^{-1}(p)$. Considero la carta locale in p:

$$\begin{aligned} \varphi_p^{-1} : B_\rho(0) \subseteq R^r &\to W_p \subseteq V \\ (t_1, \ldots, t_r) &\to \pi\big(\tilde{p} \cdot \exp(t_1 X_1 + \cdots + t_r X_r)\big) \end{aligned}$$

con W_p aperto. Se poi $q \in V$, si ha chiaramente:

$$W_q = L_{\tilde{q}\cdot\tilde{p}^{-1}}(W_p); \qquad \varphi_q = \varphi_p \circ L_{\tilde{p}\cdot\tilde{q}^{-1}}$$

L'azione $L : G \times W_p \to G/K$ è continua, dunque $L^{-1}(W_p)$ è un aperto, e chiaramente $(1_G, p) \in L^{-1}(W_p)$. Allora trovo $U(1_G) \times V'(p) \subseteq G \times W_p$ tale che $L\big(U(1_G) \times V'(p)\big) \subseteq W_p$, e chiaramente $U(1_G) = \tilde{p} \cdot \tilde{V}'(\tilde{p})^{-1}$ per un opportuno intorno $\tilde{V}'$ di $\tilde{p}$. Restringendo opportunamente $\tilde{V}'$ e V', si può supporre $V' = \pi(\tilde{V}')$, dunque $L(\tilde{p} \cdot \tilde{V}'^{-1} \times V') \subseteq W_p$. Allora, $\forall q \in V'$:

$$\begin{aligned} L(\tilde{p} \cdot \tilde{V}'^{-1} \times V') \subseteq W_p \Rightarrow L_{\tilde{p}\tilde{q}^{-1}}(V') \subseteq W_p \Rightarrow V' \subseteq L_{\tilde{q}\tilde{p}^{-1}}(W_p) \Rightarrow \\ \Rightarrow V' \subseteq W_q \end{aligned}$$

Quindi, in un opportuno intorno $V'(p)$, le carte locali di ciascun suo punto contengono tutte lo stesso V'.

Restringendo opportunamente V', possiamo supporre che f abbia sviluppo di Taylor:

$$(f \circ \varphi_p^{-1})(t_1, \ldots, t_r) = \sum_{n_1, \ldots, n_r} a_{n_1, \ldots, n_r} t_1^{n_1} \cdots t_r^{n_r}$$

assolutamente convergente in $\varphi_p(V')$.

In realtà, posso restringere opportunamente V' in modo che, $\forall q \in V'$, la funzione $f \circ \varphi_q^{-1}$ sia sviluppabile in serie assolutamente convergente nell'origine. Infatti:

$$\varphi_q = \varphi_p \circ L_{\tilde{p}\cdot\tilde{q}^{-1}}$$

quindi:

$$f \circ \varphi_q^{-1} = f \circ L_{\tilde{q}\cdot\tilde{p}^{-1}} \circ \varphi_p^{-1}$$

Considero allora la funzione:

$$\begin{aligned} \psi : \tilde{V}' \times V' &\to \mathbb{C} \\ \psi(\tilde{q}, s) &= f \circ L_{\tilde{q}\cdot\tilde{p}^{-1}}(s) \end{aligned}$$

Chiaramente:

$$\psi(\tilde{q}, s) = f \circ L(\tilde{q} \cdot \tilde{p}^{-1}, s)$$

ed essendo $L : G \times G/K \to G/K$ analitica, anche ψ è analitica. Allora, considero un intorno di $(\tilde{p}, p)$ del tipo $\tilde{V}'' \times V''$, con $V'' \subseteq V'$ e $\pi(\tilde{V}'') = V''$, in cui ψ sia sviluppabile in serie assolutamente convergente, e restringo V' a V''.

Se sviluppo ψ come funzione di due variabili, lo sviluppo di $\psi(\tilde{q}, \cdot)$ si ottiene fissando le coordinate di $\tilde{q}$ nello sviluppo di ψ (segue banalmente dall'unicità dello sviluppo di Taylor). Dunque, se lo sviluppo di ψ converge uniformemente in $\tilde{V}' \times V'$, ottengo non solo che lo sviluppo di $\psi(\tilde{q}, \cdot)$ converga uniformemente $\forall \tilde{q}$, ma che tale uniformità sia indipendente da $\tilde{q}$. In altre parole, se:

$$\psi(\tilde{q}, s) = f \circ \varphi_q^{-1}(s) = \sum_{i_1, \ldots, i_r} a^q_{i_1, \ldots, i_r} s_1^{i_1} \cdots s_r^{i_r}$$

si ha che $\forall \varepsilon > 0$ trovo M tale che la somma per $i_1 + \cdots + i_r > M$ è in modulo minore di ε, e che *M non dipende da $\tilde{q}$*. Quindi, se, all'interno della somma, penso $s_1, \ldots, s_r$ fissati e q variabile, la convergenza è comunque uniforme.

Essendo $\varphi_q(V') = \varphi_p\big(L_{\tilde{p}\tilde{q}^{-1}}(V')\big)$, con la stessa tecnica usata in precedenza posso restringere V' in modo che esista una bolla centrata nell'origine $B_\delta(0) \subseteq R^r$ tale che $\forall q \in V'$, $B_\delta(0) \subseteq \varphi_q(V')$.

Sia ora $B'_\delta(0) \subseteq \mathfrak{p}$ la bolla di raggio δ centrata nell'origine in $\mathfrak{p}$. Allora, per $X \in B'_\delta(0)$ e $q \in V'$ si ha:

$$\begin{aligned}\big(M^{\exp(X)} f\big)(\tilde{q}) &= \int_K f\big(\tilde{q}k \exp(X)\big)\, dk = \int_K f\big(\tilde{q}k \exp(X) k^{-1}\big)\, dk \\ &= \int_K f\big(\tilde{q} \exp(Ad(k)X)\big)\, dk\end{aligned}$$

Ma, per costruzione, essendo $X \in \mathfrak{p}$ si ha:

$$Ad(k)X = t_1(k)X_1 + \cdots + t_r(k)X_r$$

Avendo scelto una metrica $Ad(K)$-invariante, si ha che $\|Ad(k)X\| = \|X\| < \delta$. Essendo la base $X_1, \ldots, X_r$ ortonormale, si ha $\|Ad(k)X\| = t_1(k)^2 + \cdots + t_r(k)^2 < \delta$, ovvero $\big(t_1(k), \ldots, t_r(k)\big) \in B_\delta(0) \subseteq \varphi_q(V')\ \forall q \in V'$. Quindi:

$$\big(M^{\exp(X)} f\big)(\tilde{q}) = \int_K f\big(\tilde{q} \exp(Ad(k)X)\big)\, dk = \int_K f \circ \varphi_q^{-1}\big(t_1(k), \ldots, t_r(k)\big)\, dk$$

Sviluppando con Taylor in un intorno dell'origine:

$$\begin{aligned}\big(M^{\exp(X)} f\big)(\tilde{q}) &= \int_K \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \big[t_1(k) \tfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + t_r(k) \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big]^m \big(f \circ \varphi_q^{-1}(x_1, \ldots, x_r)\big)(0)\, dk \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_K \frac{1}{m!} \big[t_1(k) \tfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + t_r(k) \tfrac{\partial}{\partial x_r}\big]^m \big(f \circ \varphi_q^{-1}(x_1, \ldots, x_r)\big)(0)\, dk\end{aligned}$$

dove l'integrale e la somma sono stati invertiti in quanto la convergenza della serie è uniforme per costruzione (la serie di Taylor converge uniformemente come funzione di $t_1, \ldots, t_r$ in $B_\delta(0)$, ed essendo $t_1(k), \ldots, t_r(k) \in B_\delta(0)\ \forall k \in K$, si ha convergenza uniforme come funzione di k). Inoltre, si ha che:

$$\begin{aligned}
\big[\big(Ad(k)X\big)^m f\big](\tilde{q}) &= \big[\big(t_1(k)X_1 + \cdots + t_r(k)X_r\big)^m f\big](\tilde{q}) \\
&= \lambda\Big[\big(t_1(k)X_1 + \cdots + t_r(k)X_r\big)^m\Big] f(\tilde{q}) \\
&= \big[\big(t_1(k)\tfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + t_r(k)\tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)^m f\big(\tilde{q}\exp(x_1X_1 + \cdots + x_rX_r)\big)\big](0) \\
&= \big[\big(t_1(k)\tfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + t_r(k)\tfrac{\partial}{\partial x_r}\big)^m (f \circ \varphi_q^{-1})(x_1, \ldots, x_r)\big](0)
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
\big(M^{\exp(X)} f\big)(\tilde{q}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_K \frac{1}{m!} \big[\big(Ad(k)X\big)^m f\big](\tilde{q})\, dk \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_K \frac{1}{m!} \Big(X^{R^k}\Big)^m f(\tilde{q})\, dk \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \int_K \frac{1}{m!} (X^m)^{R^k} f(\tilde{q})\, dk = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D_m^X f(\tilde{q})
\end{aligned}$$

□

A questo punto richiamo brevemente alcune nozioni riguardani le funzioni analitiche a valori in uno spazio di Banach e i vettori analitici in rappresentazioni di gruppi di Lie.

Definizione 4.1 Sia M una varietà m-dimensionale e E uno spazio di Banach (anche complesso). Una funzione $f : M \to E$ è detta *analitica in* $p \in M$ se esiste una carta locale (U, φ) in p tale che:

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{n_1, \ldots, n_m} a_{n_1 \cdots n_m} x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}$$

con $a_{n_1 \cdots n_m} \in E\ \forall n_1, \ldots, n_m$, in modo che la convergenza sia assoluta (cioè in modo che sia convergente $\sum \|a_{n_1 \cdots n_m}\|$). f è detta *analitica* se lo è $\forall p \in M$.

Lemma 4.2 *Sia $f : M \to M$ analitica in $p \in M$ e sia $g : M \to E$ analitica in $f(p)$. Allora $g \circ f$ è analitica in p.*

Sia $f : M \to E$ analitica in $p \in M$ e sia $L : E \to \mathbb{C}$ lineare. Allora $L \circ f$ è analitica in p. □

Definizione 4.2 Sia $(G, \cdot)$ un gruppo di Lie e sia π una rappresentazione di G in uno spazio di Banach E. Un vettore $v \in E$ è detto *analitico per* π se la funzione:

$$\begin{aligned}
\varphi : G &\to E \\
x &\to \pi(x)v
\end{aligned}$$

è analitica.

Notazione: Indico con $\mathfrak{U}_\pi$ l'insieme dei vettori analitici per π in E.

Osservazione: Chiaramente $\mathfrak{U}_\pi$ è un sottospazio di E. Inoltre, se $v \in \mathfrak{U}_\pi$, $\forall g \in G$ si ha che $\pi(g)v \in \mathfrak{U}_\pi$: infatti, la funzione $x \to \pi(x)\pi(g)v = \pi(xg)v$ è ottenuta componendo due funzioni analitiche. Dunque $\forall g \in G$ si ha che $\mathfrak{U}_\pi$ è $\pi(g)$-invariante.

Lemma 4.3 *$\mathfrak{U}_\pi$ è denso in E. Se $dim(E) < \infty$, $\mathfrak{U}_\pi = E$.* $\square$

A questo punto enuncio un lemma che risulterà necessario per dimostrare il teorema che caratterizza le coppie di Gelfand su Gruppi di Lie.

Lemma 4.4 (approssimazione per funzioni analitiche) *Siano $f_1, \dots, f_n \in C(G)$ limitate, sia $K \subseteq G$ compatto e sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste una funzione analitica $\varphi \in L^1(G)$ tale che le convoluzioni $\varphi * f_1, \dots, \varphi * f_n$ siano analitiche e tale che:*

$$\left|\varphi * f_i(x) - f_i(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in K\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Se le funzioni f_i hanno supporto compatto, si può scegliere φ in modo che la disuguaglianza valga su tutto G.

Dimostrazione: Considero la rappresentazione regolare sinistra di G su $L^1(G)$ data da:

$$\left[\pi(x)f\right](y) = f(x^{-1}y), \quad x \in G,\ f \in L^1(G)$$

Sia $h \in L^1(G)$ un *vettore* analitico rispetto a π, ovvero tale che la funzione $x \to \pi(x)h$ sia analitica $\forall x \in G$ (quindi h non è necessariamente analitica come funzione!). Se $f \in C(G)$ limitata, si ha che la funzione:

$$\begin{aligned} \varphi_f &: G \to \mathbb{C} \\ x &\to \int_G f(y^{-1})\left[\pi(x^{-1})h\right](y)\, dy \end{aligned}$$

è ottenuta componendo le funzioni:

$$\begin{aligned} \psi_1 :\ & G \to L^1(G) \\ & x \to \pi(x^{-1})h \\ \psi_{2_f} :\ & L^1(G) \to \mathbb{C} \\ & g \to \int_G f(y^{-1})g(y)\, dy \end{aligned}$$

ψ_1 è analitica essendo h un vettore analitico, ψ_2 è lineare, dunque per il lemma 4.2 φ_f è analitica. Inoltre:

$$\varphi_f(x) = \int_G f(y^{-1})h(xy)\,dy = \int_G f(y^{-1}x)h(y)\,dy = h * f(x)$$

e dunque se $f \in C(G)$ limitata e h è un vettore analitico, $h*f$ è una funzione analitica.

Sia $U(1_G)$ un intorno compatto dell'unità in G. Sia $\{\psi_{U_n}\}_{n\in N}$ un'identità approssimata: allora anche $\{\psi_{U_n} * \psi_{U_n}\}_{n\in N}$ lo è. Allora, essendo K compatto, $\forall \varepsilon > 0$ trovo $U_{\tilde{n}}$ tale che, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\left|\psi_{U_{\tilde{n}}} * \psi_{U_{\tilde{n}}} * f_i(x) - f_i(x)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in K \tag{4.1}$$

Sia $U = U_{\tilde{n}}$. Per il lemma 4.3, trovo una successione $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ di vettori analitici tali che $\varphi_n \to \psi_U$ in norma L^1. Allora, se $f \in C(G)$ limitata, con $|f(x)| < \alpha\ \forall x \in G$, si ha:

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_n * f(x) - \psi_U * f(x)\right| &= \left|\int_G \left[\varphi_n - \psi_U\right](y) f(y^{-1}x)\,dy\right| \\
&\leq \int_G \left|\left[\varphi_n - \psi_U\right](y)\right| \cdot \left|f(y^{-1}x)\right| dy \\
&\leq \alpha \int_G \left|\left[\varphi_n - \psi_U\right](y)\right| dy \\
&= \alpha \cdot \left\|\varphi_n - \psi_U\right\|_{L^1(G)} \to 0
\end{aligned}$$

dunque $\varphi_n * f(x)$ converge uniformemente a $\psi_U * f(x)$ in G. Quindi, per $f = \psi_U * f_i$ si ha che $\forall \varepsilon > 0$ trovo $\tilde{n} \in N$ tale che:

$$\left|\varphi_{\tilde{n}} * \psi_U * f_i(x) - \psi_U * \psi_U * f_i(x)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in G$$

Dunque:

$$\left|\varphi_{\tilde{n}} * \psi_U * f_i(x) - f_i(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall x \in K$$

Dunque si ha la tesi per $\varphi = \varphi_{\tilde{n}} * \psi_U$, che è analitica essendo $\varphi_{\tilde{n}}$ un vettore analitico per costruzione. Se le funzioni f_i hanno supporto compatto, costruisco l'identità approssimata $\{\psi_{U_n} * \psi_{U_n}\}$ in modo che i supporti siano contenuti in un intorno compatto dell'unità $U(1_G)$, e scelgo $K = \mathrm{supp}(f_1) \cdot U \cup \ldots \cup \mathrm{supp}(f_n) \cdot U$. In questo modo, (4.1) vale $\forall x \in G$ essendo $\mathrm{supp}(\psi_{U_n} * \psi_{U_n} * f) \subseteq \mathrm{supp}(\psi_{U_n} * \psi_{U_n}) \cdot \mathrm{supp}(f) \subseteq K$. $\square$

Teorema 4.5 *Sia G un gruppo di Lie* connesso *e $K \leq G$ un sottogruppo compatto. Allora (G, K) è una coppia di Gelfand se e solo se $\mathbb{D}(G/K)$ è un'algebra commutativa.*

Dimostrazione:

$\Leftarrow$) Sia $f \in C_K(G)$ analitica. Allora, per $\|X\|, \|Y\| < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} M^{\exp(X)} M^{\exp(Y)} f(1_G) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} D_m^X \big(M^{\exp(Y)} f\big)(1_G) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m!} D_m^X \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} D_i^Y f \right)(1_G) \right) \end{aligned}$$

La convergenza della serie interna è uniforme per quanto dimostrato nel lemma 4.1. Dunque, anche la somma è analitica e l'operatore D_m^X può essere applicato membro a membro. Dunque:

$$\begin{aligned} M^{\exp(X)} M^{\exp(Y)} f(1_G) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{i!} D_m^X D_i^Y f(1_G) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{i!} D_i^Y D_m^X f(1_G) = M^{\exp(Y)} M^{\exp(X)} f(1_G) \end{aligned}$$

D_m^X e D_i^Y sono stati invertiti per ipotesi ($\mathbb{D}(G/K) \cong \mathbb{D}_K^K(G)$, dunque anche $\mathbb{D}_K^K(G)$ è commutativa), e le due serie sono state invertite in quanto la convergenza è assoluta.

Dunque, per x, y contenuti in un opportuno intorno di 1_G, si ha $M^x M^y f(1_G) = M^y M^x f(1_G)$, ma essendo entrambi i membri analitici (lemma 4.7 pag. 63) si ha che l'identità vale $\forall x, y \in G$.

Finora abbiamo supposto f analitica. Sia ora $f \in C_K(G)$ generica e siano $x, y \in G$ fissati: per il lemma di approssimazione per funzione analitiche, possiamo costruire una successione di funzioni analitiche $\{\varphi_n^*\}_{n \in N}$ tali che $\varphi_n^* \to f$ uniformemente in $KxKyK \cup KyKxK$. Se considero $\varphi_n(g) = \int_K \varphi_n^*(gk)\, dk$, ho che per il lemma 4.7 pag. 63 anche φ_n è analitica e appartiene a $C_K(G)$. Inoltre, rimane anche la convergenza uniforme: infatti, se $|\varphi_n^*(k_1 x k_2 y k_3) - f(k_1 x k_2 y k_3)| \leq \varepsilon\ \forall k_1, k_2, k_3 \in K$, si ha, per $k_1, k_2, k_3 \in K$:

$$\begin{aligned} \big|\varphi_n(k_1 x k_2 y k_3) - f(k_1 x k_2 y k_3)\big| &= \left| \int_K \varphi_n^*(k_1 x k_2 y k_3 h)\, dh - f(k_1 x k_2 y k_3) \right| \\ &= \left| \int_K \big[\varphi_n^*(k_1 x k_2 y k_3 h) - f(k_1 x k_2 y k_3 h)\big]\, dh \right| \\ &\leq \int_K \big|\varphi_n^*(k_1 x k_2 y k_3 h) - f(k_1 x k_2 y k_3 h)\big|\, dk \leq \int_K \varepsilon \cdot\, dk = \varepsilon \end{aligned}$$

Stesso ragionamento invertendo x e y. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} M^x M^y \varphi_n(1_G) &= \int_K M^y \varphi_n(kx)\, dk = \int_K \int_K \varphi_n(kxhy)\, dh \cdot dk \\ &= \iint_{K \times K} \varphi_n(kxhy)\, dh \cdot dk \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \iint_{K \times K} f(kxhy)\, dh \cdot dk \\ &= M^x M^y f(1_G) \end{aligned}$$

Stesso ragionamento invertendo x e y. Dunque:

$$M^x M^y f(1_G) = \lim_{n\to+\infty} M^x M^y \varphi_n(1_G) = \lim_{n\to+\infty} M^y M^x \varphi_n(1_G) = M^y M^x f(1_G)$$

Allora, se $f, g \in C_C(G)^\natural$:

$$\begin{aligned}
&M^x M^{y^{-1}} f(1_G) = M^{y^{-1}} M^x f(1_G)\\
&\iint_{K\times K} f(kxhy^{-1})\,dh\cdot\,dk = \iint_{K\times K} f(ky^{-1}hx)\,dh\cdot\,dk\\
&\int_K f(xhy^{-1})\,dh = \int_K f(y^{-1}hx)\,dh\\
&\int_G\int_K f(xhy^{-1})\,dh\cdot g(y)\,dy = \int_G\int_K f(y^{-1}hx)\,dh\cdot g(y)\,dy\\
&\int_K\int_G f(xhy^{-1})g(y)\,dy\cdot\,dh = \int_K\int_G f(y^{-1}hx)g(y)\,dy\cdot\,dh\\
&\int_K\int_G f(y)g(y^{-1}xh)\,dy\cdot\,dh = \int_K\int_G g(y)f(y^{-1}hx)\,dy\cdot\,dh\\
&\int_K f*g(xh)\,dh = \int_K g*f(hx)\,dh\\
&f*g(x) = g*f(x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Siano $f, g \in C_C^\infty(G)^\natural$, e siano $D, E \in \mathbb{D}_K(G)$. Per il 3.16 si ha:

$$\begin{aligned}
&DE(f*g) = D(f*Eg) = D(Eg*f) = Eg*Df\\
&ED(f*g) = ED(g*f) = E(g*Df) = E(Df*g) = Df*Eg = Eg*Df
\end{aligned}$$

Dunque $DE = ED$ su $C_C^\infty(G)^\natural * C_C^\infty(G)^\natural$. In realtà, questo vale su tutto $C_C^\infty(G)^\natural$: infatti, basta costruire un'identità approssimata ψ_{U_n} in modo che $\psi_{U_n} * f$ converga uniformemente a f.

Sia $f \in C_K^\infty(G)$ a supporto compatto. Poniamo:

$$f^*(x,y) = M^x f(y)$$

Chiaramente $f^* \in C_C^\infty(G)^\natural$. Si ha inoltre:

$$\begin{aligned}
D^{(x)} f^*(x,y) &= D^{(x)}\left(\int_K f(ykx)\,dk\right) = D^{(x)}\left(\int_K f\circ L^{yk}(x)\,dk\right)\\
&= \int_K D\big(f\circ L^{yk}\big)(x)\,dk = \int_K Df(ykx)\,dk = (DF)^*(x,y)
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
D^{(x)} f^*(1_G, y) &= \int_K Df(yk)\,dk = \int_K Df\circ R^k(y)\,dk\\
&= \int_K D\big(f\circ R^k\big)(y)\,dk = Df(y)
\end{aligned}$$

Così, per $D, E \in C_K(G)$ e $f \in C_K^\infty(G)$:

$$\begin{aligned} DEf(y) &= \left[D^{(x)}(Ef)^*\right](1_G, y) = D^{(x)}E^{(x)}f^*(1_G, y) \\ &= E^{(x)}D^{(x)}f^*(1_G, y) = EDf(y) \end{aligned}$$

Dunque $\mathbb{D}_K^K(G)$ è commutativa, e quindi lo è anche $\mathbb{D}(G/K)$. $\square$

Corollario 4.6 *Se $\mathbb{D}(G/K)$ è generata da un solo elemento, (G, K) è una coppia di Gelfand.* $\square$

4.2 Caratterizzazione differenziale delle funzioni sferiche

Lemma 4.7 *Sia $A \subseteq G$ aperto tale che $Ak \subseteq A\ \forall k \in K$, e sia $F : A \to \mathbb{C}$ analitica. Allora la funzione $f : A \to \mathbb{C}$:*

$$f(x) = \int_K F(xk)\, dk$$

è anch'essa analitica.

Dimostrazione: Sia $x_0 \in A$ fissato e $(V(x_0), \psi)$ una carta locale in x_0. Per $k \in K$, sia $(U_k(k), \psi_k)$ una carta locale in k: essendo il prodotto $G \times K \to G$ analitico, posso trovare un intorno $W_k(x_0) \subseteq V$ e un intorno $R_k(k) \subseteq U_k$ tali che la funzione:

$$\begin{aligned} \varphi : W_k \times R_k &\to \mathbb{C} \\ \varphi(x, h) &= F(xh) \end{aligned}$$

sia sviluppabile in serie. Si ha quindi:

$$F(xh)|_{W_k \times R_k} = \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ \beta_1, \ldots, \beta_p}} a^k_{\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_p} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} h_1^{\beta_1} \cdots h_p^{\beta_p}$$

Restringendo opportunamente gli intorni, posso supporre che la convergenza sia uniforme. Essendo K compatto, scelgo una sottocopertura $R_{k_1}, \ldots, R_{k_t}$ di K: sia $\phi_1, \ldots, \phi_t$ una partizione dell'unità ad essa subordinata, e sia $W = W_{k_1} \cap \cdots \cap W_{k_t}$. Si ha allora:

$$\begin{aligned} F(xh)|_{W \times K} &= \sum_{i=1}^t \phi_i(h) \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ \beta_1, \ldots, \beta_p}} a^{k_i}_{\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_p} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} h_1^{\beta_1} \cdots h_p^{\beta_p} \\ &= \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \left(\sum_{i=1}^t \phi_i(h) \sum_{\beta_1, \ldots, \beta_p} a^{k_i}_{\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_p} h_1^{\beta_1} \cdots h_p^{\beta_p} \right) x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \gamma(h) x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Allora:

$$f(xk) = \int_K \Big(\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \gamma(h) x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \Big) \, dh = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \Big(\int_K \gamma(h) \, dh \Big) x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Essendo x_0 generico, f è analitica su tutto A. $\square$

Teorema 4.8 *Sia $f \in C(G)$, $f \neq 0$. f è sferica se e solo se:*

- *$f \in C^\infty(G)^\natural$ (in realtà f risulterà essere analitica);*
- *$f(1_G) = 1$;*
- *Se $f = \tilde{f} \circ \pi$, $\tilde{f} \in C(G/K)$, allora $\tilde{f}$ è autofunzione di tutti gli operatori in $\mathbb{D}(G/K)$:*
$$D\tilde{f} = \lambda_D \tilde{f} \quad \forall D \in D\big(G/K\big)$$

Userò nella dimostrazione il noto teorema (si veda [9] p. 57):

Teorema di Bernstein: Sia M una varietà differenziale e D un operatore differenziale su M analitico (cioè a coefficienti analitici nello sviluppo in carte locali) e *ellittico*. Allora le sue autofunzioni sono analitiche. $\square$

Dim teorema:

$\Leftarrow$) Sia $D \in \mathbb{D}(G)$, e sia $D_0 = \int_K D^{R^k} \, dk$, $D_0 \in \mathbb{D}_K(G)$. Sia $F \in C^\infty(G)^\natural$. Allora, per $k \in K$:

$$DF(k) = DF \circ L^k(1_G) = D(F \circ L^k)(1_G) = DF(1_G)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} D_0 F(1_G) &= \int_K D^{R^k} F(1_G) \, dk = \int_K D(F \circ R^k) \circ R^{k^{-1}}(1_G) \, dk \\ &= \int_K DF \circ R^{k^{-1}}(1_G) \, dk = \int_K DF(k) \, dk = DF(1_G) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sia ora $f \in C^\infty(G)^\natural$ tale che $D\tilde{f} = \lambda_D \tilde{f} \quad \forall D \in \mathbb{D}(G/K)$. Per il teorema 3.13, possiamo introdurre su G/K una metrica riemanniana analitica invariante per l'azione di G. Rispetto a questa metrica, quindi, la traslazione per un elemento di G è un'isometria, e per il teorema 3.7 l'operatore di Laplace-Beltrami Δ è invariante per L^g, ovvero $\Delta \in \mathbb{D}(G/K)$. Si ha quindi $\Delta \tilde{f} = \lambda_\Delta \tilde{f}$, con $\lambda_\Delta \in \mathbb{C}$. Ma Δ è ellittico per l'osservazione seguente la def. 3.5 (pagina 27), e dunque, per il teorema di Bernstein, $\tilde{f}$ è analitica. Essendo π analitica, anche f lo è.

Sia ora $x \in G$ e sia $F_x : G \to \mathbb{C}$ pari a:

$$F_x(y) = \int_K f(xky)\,dk$$

Anche F_x è biinvariante per K ed è analitica: infatti, si ha

$$F_x(y) = \int_K f \circ R^{y^{-1}}(xk)\,dk$$

e $f \circ R^{y^{-1}}$ è analitica, quindi, per il lemma 4.7, anche F_x lo è. Per il teorema 3.29, si ha che $\mathbb{D}_K^K(G) \cong \mathbb{D}(G/K)$. Sia $\tilde{D}_0 \in \mathbb{D}(G/K)$ l'immagine di $D_0|_{C_K^\infty(G)}$ tramite questo isomorfismo di algebre. Per ipotesi, $\tilde{D}_0\tilde{f} = \lambda_D\tilde{f}$, e quindi:

$$\begin{aligned}
&\tilde{D}_0\tilde{f} = D_0(\tilde{f} \circ \pi) \circ \pi^{-1}\\
&\tilde{D}_0\tilde{f} \circ \pi = D_0(\tilde{f} \circ \pi)\\
&\lambda_D\tilde{f} \circ \pi = D_0(\tilde{f} \circ \pi)\\
&\lambda_D f = D_0 f
\end{aligned}$$

dunque f è autofunzione di D_0. Allora, per il teorema 3.14:

$$\begin{aligned}
D_0F_x(y) &= D_0^{(y)}\left(\int_K f \circ L^x(ky)\,dk\right) = \int_K D_0^{(y)}(f \circ L^x)(ky)\,dk\\
&= \int_K D_0^{(y)} f \circ L^x(ky)\,dk = \int_K D_0^{(y)} f(xky)\,dk = \lambda_D F_x(y)
\end{aligned}$$

Di conseguenza, essendo $DF_x(1_G) = D_0F_x(1_G)$, si ha $DF_x(1_G) = \lambda_D F_x(1_G)$. Inoltre, per (4.2), $Df(1_G) = D_0f(1_G) = \lambda_D f(1_G)$. Quindi, considerando la funzione $\varphi_x(y) = f(1_G)F_x(y) - F_x(1_G)f(y)$ si ha:

$$\begin{aligned}
D\big(f(1_G)F_x - F_x(1_G)f\big)(1_G) &= f(1_G)DF_x(1_G) - F_x(1_G)Df(1_G)\\
&= f(1_G) \cdot \lambda_D F_x(1_G) - F_x(1_G) \cdot \lambda_D f(1_G) = 0
\end{aligned}$$

L'equazione precedente vale $\forall D \in \mathbb{D}(G)$. Ma $f(1_G)F_x - F_x(1_G)f$ è analitica, dunque, per la formula di Taylor (teorema 3.19 pag. 39), dev'essere $f(1_G)F_x - F_x(1_G)f = 0$, ovvero, essendo $f(1_G) = 1$ per ipotesi, $F_x(y) = F_x(1_G)f(y)$, cioè:

$$\int_K f(xky)\,dk = \int_K f(xk)\,dk \cdot f(y) = f(x)f(y)$$

$\Rightarrow$) Dimostro che f è necessariamente C^∞. Posso costruire $\rho \in C_C^\infty(G)$ tale che:

$$\int_G f(x)\rho(x)\,dx \neq 0$$

Infatti, essendo $f \neq 0$ e continua per ipotesi, trovo $x_0 \in G$ e un suo intorno connesso U tale che $f|_U \neq 0$ (e quindi $f|_U$ ha segno costante): scelgo allora ρ non negativa con supporto in U e tale che $\rho(x_0) > 0$. Si ha:

$$\begin{aligned} f(x) \int_G f(y)\rho(y)\,dy &= \int_G \rho(y) \left(\int_K f(xky)\,dk \right) dy = \int_K \int_G \rho(y) f(xky)\,dy\,dk \\ &= \int_K \int_G \rho(k^{-1}x^{-1}y) f(y)\,dy\,dk = \int_G \left(\int_K \rho(k^{-1}x^{-1}y)\,dk \right) f(y)\,dy \end{aligned}$$

In realtà, nell'ultimo integrale non è necessario che y vari su tutto G. Basta infatti chiedere che $\exists k : k^{-1}x^{-1}y \in \operatorname{supp}(\rho)$, altrimenti avrei che $\rho(k^{-1}x^{-1}y) = 0$. Quindi, dev'essere $y \in x \cdot K \cdot \operatorname{supp}(\rho)$. Allora, per $x_0 \in G$, scelgo un intorno *compatto* $\overline{V}(x_0)$ e ho che, per $x \in \overline{V}$, dev'essere $y \in \overline{V} \cdot K \cdot \operatorname{supp}(\rho)$, che è un compatto. Sia $C = \overline{V} \cdot K \cdot \operatorname{supp}(\rho)$, e siano $\psi(x, y) = \int_K \rho(k^{-1}x^{-1}y)\,dk$ e $t = \int_G f(y)\rho(y)\,dy$. Si ha allora:

$$f|_{\overline{V}}(x) = \tfrac{1}{t} \int_C \psi(x, y) f(y)\,dy$$

Per il teorema 3.14 si ha che $\psi(\cdot, y)$, e quindi f, sono C^∞. Se $D_0 \in \mathbb{D}_K(G)$:

$$\begin{aligned} f(x) D_0 f(y) &= D_0^{(y)} \big[f(x) f(y) \big] = D_0^{(y)} \left(\int_K f(xky)\,dk \right) \\ &= D_0^{(y)} \left(\int_K f \circ L^{xk}(y)\,dk \right) = \int_K D_0^{(y)} (f \circ L^{xk})(y)\,dk \\ &= \int_K D_0^{(y)} f \circ L^{xk}(y)\,dk = \int_K D_0^{(y)} f(xky)\,dk = \int_K D_0 f(xky)\,dk \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio il riferimento alla variabile di derivazione diventa ininfluente. Per $y = 1_G$:

$$\begin{aligned} f(x) D_0 f(1_G) &= \int_K D_0 f(xk)\,dk \\ f(x) D_0 f(1_G) &= \int_K D_0 f \circ R^{k^{-1}}(x)\,dk \\ &= \int_K D_0 (f \circ R^{k^{-1}})(x)\,dk = \int_K D_0 f(x)\,dk \\ f(x) D_0 f(1_G) &= D_0 f(x) \end{aligned}$$

Dunque f è autofunzione degli operatori di $\mathbb{D}_K(G)$. Allora, per $D \in \mathbb{D}(G/K)$, sfruttando l'isomorfismo $\mathbb{D}(G/K) \cong \mathbb{D}_K^K(G)$:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_0 \tilde{f} &= D_0 f \circ \pi^{-1} \\ \tilde{D}_0 \tilde{f} &= \lambda_D f \circ \pi^{-1} = \lambda_D \tilde{f} \end{aligned}$$

□

Corollario 4.9 *Siano f_1 e f_2 due funzioni sferiche tali che, $\forall D \in \mathbb{D}_K^K(G)$, f_1 e f_2 siano autofunzioni rispetto ad uno stesso autovalore λ_D. Allora $f_1 = f_2$. Dunque, fissati dei generatori $D_1, \ldots, D_s$ per $\mathbb{D}_K^K(G)$, una funzione sferica è univocamente determinata dal vettore $(\lambda_{D_1}, \ldots, \lambda_{D_s}) \in R^s$ dei suoi autovalori rispetto ai generatori.*

Dimostrazione: Per l'equazione (4.2) si ha che, per $i = 1, 2$, $Df_i(1_G) = D_0 f_i(1_G)$, con $D_0 \in \mathbb{D}_K(G)$. Per i teoremi 3.28, 3.29 e 3.30, si ha $\mathbb{D}_K(G) \cong \big(\mathbb{D}_K(G) \cap \mathbb{D}(G)\mathfrak{h}\big) \oplus \mathbb{D}_K^K(G)$, per cui $D_0 = D_0^A X + D_0^B$ con $X \in \mathfrak{h}$ e $D_0^B \in \mathbb{D}_K^K(G)$. Essendo,per $i = 1, 2$, $Xf_i = 0$, e $D_0^B f_i = \lambda_{D_0^B} f_i$, si ha:

$$Df_1(1_G) = Df_2(1_G) = \lambda_{D_0^B}, \quad \forall D \in \mathbb{D}(G)$$

Essendo f_1 e f_2 analitiche, dev'essere $f_1 = f_2$. $\Box$

Osservazione: In questo modo l'insieme delle funzioni sferiche si identifica a un sottoinsieme di $A \subseteq R^s$. Chiaramente A eredita la topologia di Gelfand secondo questa identificazione. E' naturale chiedersi a questo punto se tale topologia coincide con quella euclidea.

Teorema 4.10 *La topologia euclidea di A coincide con quella indotta dalla topologia di Gelfand.*

Dimostrazione: Essendo entrambe le topologie di Hausdorff a base numerabile, per dimostrare che coincidono basta dimostrare che inducono la stessa nozione di convergenza.

Sia $\mathbb{D}_K^K(G) =< D_1, \ldots, D_s >$ e sia $\{\varphi_n\}_{n \in N}$ una successione di funzioni sferiche, con $D_i \varphi_n = \lambda_{i,n} \varphi_n$, $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$. Supponiamo che $\varphi_n \to \varphi$ localmente uniformemente, con $D_i \varphi = \lambda_i \varphi$, $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$: bisogna dimostrare che $\lambda_{i,n} \to \lambda_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$.

Come segue dalla formula ..., $\lambda_{i,n} = D_i \varphi_n(1_G)$ e $\lambda_i = D_i \varphi(1_G)$. Si tratta quindi di dimostrare che:

$$\varphi_n \to \varphi \text{ loc. unif.} \Rightarrow D\varphi_n(1_G) \to D\varphi(1_G), \quad \forall D \in \mathbb{D}_K^K(G)$$

Per la formula ..., si ha, per $A \in R$, $\overline{V}$ intorno compatto di 1_G e $C \subseteq G$ *compatto*:

$$f|_{\overline{V}}(x) = A \int_C \left(\int_K \rho(k^{-1} x^{-1} y)\, dk \right) f(y)\, dy = A \int_C \psi(x, y) f(y)\, dy$$

$$Df|_{\overline{V}}(x) = A \int_C \big[D^{(x)} \psi(x, y) \big] f(y)\, dy$$

$$Df(1_G) = \int_C \eta(y) f(y)\, dy$$

con $\eta(y) = A \cdot \left(D^{(x)}\psi(x,y)|_{x=1_G}\right)$. Allora:

$$D\varphi_n(1_G) = \int_C \eta(y)\varphi_n(y)\,dy$$
$$D\varphi(1_G) = \int_C \eta(y)\varphi(y)\,dy$$

Essendo η continua e quindi limitata su C, è chiaro che se $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente su C allora $\eta \cdot \varphi_n \to \eta \cdot \varphi$ unif. su C, e dunque $D\varphi_n(1_G) \to D\varphi(1_G)$.

Viceversa, bisogna dimostrare che $\lambda_{i,n} \to \lambda_i\ \forall i \in \{1,\ldots,s\} \Rightarrow \varphi_n \to \varphi$ loc. unif. (DA COMPLETARE)

4.3 Spazi doppiamente transitivi

Definizione 4.3 Sia G un gruppo che agisce su uno spazio metrico (X,d). L'azione di G è detta *doppiamente transitiva* se, date due coppie di punti (x,y) e (x',y') tali che $d(x,y) = d(x',y')$, esiste $g \in G$ tale che $x' = g.x$ e $y' = g.y$.

Lemma 4.11 *Sia G un gruppo localmente compatto e $K \leq G$ un sottogruppo compatto. Se G/K ammette una distanza d G-invariante, cioè tale che $d(xK,yK) = d(gxK,gyK)$, $\forall g \in G$, e rispetto a cui l'azione di G è doppiamente transitiva, allora (G,K) è una coppia di Gelfand.*

Dimostrazione: Per ipotesi, $\forall g \in G$, $d(K,gK) = d(g^{-1}K,K)$, e quindi:

$$d(K,gK) = d(K,g^{-1}K)$$

Allora, per la doppia transitività, per ogni $g \in G$ esiste $x \in G$ tale che:

$$xK = K; \quad xgK = g^{-1}K$$

Ma $xK = K \Rightarrow x = k \in K$, e $kgK = g^{-1}K \Rightarrow g^{-1} \in KgK$. Dunque, se f è biinvariante per K, $f(g^{-1}) = f(g)$, $\forall g \in G$. Se poniamo $f^{\vee}(x) = f(x^{-1})$, otteniamo $f^{\vee} = f$ per $f \in C_C(G)^{\natural}$.

Allora, se $f,g \in C_C(G)^{\natural}$ si ha $(f*g)^{\vee} = f*g$, ma anche che:

$$(f*g)^{\vee}(x) = f*g(x^{-1}) = \int_G f(y)g(y^{-1}x^{-1})\,dy = \int_G f(x^{-1}y)g(y^{-1})\,dy$$
$$= \int_G g^{\vee}(y)f^{\vee}(y^{-1}x)\,dy = g^{\vee}*f^{\vee}(x) = g*f(x)$$

Dunque $f*g = g*f$. $\square$

Sia ora G un gruppo di Lie. Se consideriamo G/K come varietà riemanniama munita di una metrica G-invariante, si ha per definizione che L^g è un'isometria di G/K $\forall g \in G$, dunque la relativa distanza geodetica è G-invariante. Dunque, se l'azione di G è doppiamente transitiva, (G, K) è una coppia di Gelfand. In realta, si può dire molto di più.

Teorema 4.12 *Se l'azione di G su G/K è doppiamente transitiva, $\mathbb{D}(G/K)$ è generata dall'operatore di Laplace-Beltrami.*

Dimostrazione: Il fatto che l'azione sia doppiamente transitiva implica che $Ad_G(K)$ agisce transitivamente sulla sfera unitaria dello spazio tangente $T_K(G/K)$. Infatti, scelgo una carta locale U in K che sia un intorno *normale* di K (la mappa esponenziale Exp della varietà G/K ristretta alla controimmagine di U è un diffeomorfismo) e una sfera di raggio δ tale che $S_\delta(0) \subseteq U$. Siano $X, Y \in S_\delta(0)$: chiaramente, $d(X, 0) = d(Y, 0)$, e dunque, per le proprietà della mappa esponenziale, $d\big(K, \mathrm{Exp}(X)\big) = d\big(K, \mathrm{Exp}(Y)\big)$. Per doppia transitività dell'azione di G esiste $g \in G$ tale che $gK = K$ e $L^g\big(\mathrm{Exp}(X)\big) = \mathrm{Exp}(Y)$.

Sfruttando l'osservazione ..., ho che $\mathrm{Exp}(X) = \exp(X_1)K$ e $\mathrm{Exp}(Y) = \exp(Y_1)K$, dove X_1 e Y_1 sono i vettori corrispondenti a X e Y in $\mathfrak{m}$. Dunque:

$$\begin{aligned} &gK = K \\ &g\exp(X_1)K = \exp(Y_1)K \end{aligned}$$

Ma $gK = K \Rightarrow g = k \in K$, e dunque:

$$\begin{aligned} &k\exp(X_1)K = \exp(Y_1)K \\ &k\exp(X_1)k^{-1}K = \exp(Y_1)K \\ &\exp\big(Ad(k)X_1\big)\exp(K_1) = \exp(Y_1)\exp(K_2) \\ &Ad(k)X_1 = Y_1 \end{aligned}$$

e quindi $Ad(k)X = Y$. Questo dimostra che $Ad_G(K)$ agisce in maniera transitiva su $S_\delta(0)$, e quindi sulla sfera (basta moltiplicare X e Y per $1/\delta$).

Sia allora $X_1, .., X_r$ una base ortonormale di $T_K(G/K) \cong \mathfrak{m}$, e sia $P(X_1, \ldots, X_r) \in I(\mathfrak{m})$, e siano $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_r), \underline{y} = (y_1, \ldots, y_r) \in R^r$ tali che $x_1^2 + \cdots + x_r^2 = y_1^2 + \cdots + y_r^2$. Allora esiste una rotazione ρ tale che $\underline{x} = \rho(\underline{y})$. Allora:

$$\begin{aligned} P(x_1, \ldots, x_r) &= P(X_1, \ldots, X_r)|_{\underline{x}} = P(X_1, \ldots, X_r)|_{\rho(\underline{y})} = P(\rho X_1, \ldots, \rho X_r)|_{\underline{y}} \\ &= P(Ad(k)X_1, \ldots, Ad(k)X_r)|_{\underline{y}} = P(X_1, \ldots, X_r)|_{\underline{y}} = P(y_1, \ldots, y_r) \end{aligned}$$

Dunque:

$$P(X_1, \ldots, X_r) = P(X_1^2 + \cdots + X_r^2)$$

e dunque $I(\mathfrak{m})$ è generata dal solo polinomio $X_1^2 + \cdots + X_r^2$, e quindi $\mathbb{D}(G/K)$ è generata dal solo operatore $\phi(X_1^2 + \cdots + X_r^2)$.

Osservazione: Dal teorema precedente segue anche che (G, K) è una coppia di Gelfand, ma questo era già noto per il corollario 4.6.

Capitolo 5

Funzioni di tipo positivo

5.1 Definizione e principali proprietà

Sia $(G, \cdot)$ un gruppo localmente compatto.

Definizione 5.1 Una funzione $f : G \to \mathbb{C}$ è detta *di tipo positivo* se, $\forall n \in N, \forall x_1, \dots, x_n \in G, \forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i^{-1} x_j) c_i \overline{c_j} \geq 0$$

Lemma 5.1 *Sia f una funzione di tipo positivo. Allora, $\forall x \in G$:*

1. $f(x^{-1}) = \overline{f(x)}$
2. $|f(x)| \leq f(1_G)$

Dimostrazione: Basta considerare $n = 2$, $x_1 = 1_G$ e $x_2 = x$. Allora, dalla definizione, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(1_G) & f(x) \\ f(x^{-1}) & f(1_G) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{c_1} \\ \overline{c_2} \end{bmatrix} \geq 0$$

Ponendo:

$$A = \begin{bmatrix} f(1_G) & f(x) \\ f(x^{-1}) & f(1_G) \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$c_T A \overline{c} \geq 0, \ \forall c \in \mathbb{C}^2$$

Allora:

$$\begin{aligned} c_T A \overline{c} &= \overline{c_T A \overline{c}} = \overline{c}_T \overline{A} c \\ c_T A \overline{c} &= \left(c_T A \overline{c}\right)_T = \overline{c}_T A_T c \end{aligned}$$

Dunque $\overline{c}_T\overline{A}c = \overline{c}_T A_T c \ \forall c \in \mathbb{C}^2$, cioè $\overline{A} = A_T$, da cui:

$$f(1_G) = \overline{f(1_G)} \Rightarrow f(1_G) \in \mathbb{R}$$
$$f(x^{-1}) = \overline{f(x)}$$

Infine, A è semidefinita positiva, per cui traccia e determinante devono essere non negativi (se λ è un autovalore, si ha $c_T\lambda\overline{c} \geq 0$, cioè $\lambda\|c\|^2 \geq 0$, quindi $\lambda \geq 0$. Allora traccia e determinante, che sono somma e prodotto dei due autovalori, sono non negativi). Quindi:

$$Tr(A) \geq 0 \Rightarrow 2f(1_G) \geq 0 \Rightarrow f(1_G) \geq 0$$
$$Det(A) \geq 0 \Rightarrow f(1_G)^2 - f(x)\overline{f(x)} \geq 0 \Rightarrow |f(x)|^2 \leq f(1_G)^2$$

□

Lemma 5.2 *Sia $f \in C(G)$. f è di tipo positivo se e solo se $\forall \varphi \in C_C(G)$:*

$$\iint_{G\times G} f(x^{-1}y)\varphi(x)\overline{\varphi(y)}\,dx\,dy \geq 0$$

Dimostrazione:

$\Leftarrow$) Sia $\{\psi_{U_n}\}$ un'approssimazione dell'identità, cioè una successione di funzioni tale che:

- $\forall n\ U_n$ è un intorno di 1_G, e $U_n \to \{1_G\}$
- $\mathrm{supp}(\psi_{U_n})$ è compatto e $\mathrm{supp}(\psi_{U_n}) \subseteq U_n$
- $\psi_{U_n} \geq 0$
- $\psi_{U_n}(x^{-1}) = \psi_{U_n}(x)\ \forall x \in G$
- $\int_G \psi_{U_n}(x)\,dx = 1$

Allora, dati $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ e $x_1, \ldots, x_m \in G$ sia $\varphi_{U_n} = \sum_{j=1}^m c_j L_{x_j^{-1}}\psi_{U_n}$. Allora verifico che:

$$\iint_{G\times G} f(x^{-1}y)\varphi_{U_n}(x)\overline{\varphi_{U_n}(y)}\,dx\,dy \xrightarrow{n} \sum_{i,j=1}^m c_i\overline{c_j}f(x_i^{-1}x_j)$$

Infatti:

$$\iint_{G\times G} f(x^{-1}y)\varphi_{U_n}(x)\overline{\varphi_{U_n}(y)}\,dx\,dy$$
$$= \sum_{i,j=1}^{m} c_i\overline{c_j}\iint_{G\times G} f(x^{-1}y)L_{x_i^{-1}}\psi_{U_n}(x)L_{x_j^{-1}}\psi_{U_n}(y)\,dx\,dy$$
$$= \sum_{i,j=1}^{m} c_i\overline{c_j}\iint_{G\times G} f(x^{-1}y)\psi_{U_n}(x_i^{-1}x)\psi_{U_n}(x_j^{-1}y)\,dx\,dy$$
$$= \sum_{i,j=1}^{m} c_i\overline{c_j}\iint_{G\times G} f(x^{-1}x_i^{-1}x_jy)\psi_{U_n}(x)\psi_{U_n}(y)\,dx\,dy$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_i\overline{c_j}f(x_i^{-1}x_j) = \sum_{i,j=1}^{m} c_i\overline{c_j}f(x_i^{-1}x_j)\iint_{G\times G}\psi_{U_n}(x)\psi_{U_n}(y)\,dx\,dy$$
$$= \sum_{i,j=1}^{m} c_i\overline{c_j}\iint_{G\times G} f(x_i^{-1}x_j)\psi_{U_n}(x)\psi_{U_n}(y)\,dx\,dy$$

Negli integrali posso pensare f come ristretta a $\operatorname{supp}(\psi_n)\times\operatorname{supp}(\psi_n)$.

$$\left|\iint_{G\times G} f(x^{-1}x_i^{-1}x_jy)\psi_{U_n}(x)\psi_{U_n}(y)\,dx\,dy - \right.$$
$$\left.\iint_{G\times G} f(x_i^{-1}x_j)\psi_{U_n}(x)\psi_{U_n}(y)\,dx\,dy\right|$$
$$= \iint_{U_n\times U_n}\left|f(x^{-1}x_i^{-1}x_jy) - f(x_i^{-1}x_j)\right|\psi_{U_n}(x)\psi_{U_n}(y)\,dx\,dy$$
$$= \left\|\Big(f(x^{-1}x_i^{-1}x_jy) - f(x_i^{-1}x_j)\Big)\Big(\psi_{U_n}(x)\psi_{U_n}(y)\Big)\right\|_{L^1(U_n\times U_n)}$$
$$\le \left\|f(x^{-1}x_i^{-1}x_jy) - f(x_i^{-1}x_j)\right\|_{L^\infty(U_n\times U_n)}\left\|\psi_{U_n}(x)\psi_{U_n}(y)\right\|_{L^1(U_n\times U_n)}$$
$$= \sup_{x,y\in U_n}\left|f(x^{-1}x_i^{-1}x_jy) - f(x_i^{-1}x_j)\right| \xrightarrow{n} 0$$

La convergenza a 0 è dovuta al fatto che il sup è in realtà un massimo (la funzione è continua e il suo supporto è contenuto in U_n), dunque esistono $\{x_n\}\to 1_G, \{y_n\}\to 1_G$ tali che $\sup\limits_{x,y\in U_n}|f(x^{-1}x_i^{-1}x_jy) - f(x_i^{-1}x_j)| = |f(x_n^{-1}x_i^{-1}x_jy_n) - f(x_i^{-1}x_j)|$, da cui la tesi per continuità del prodotto e di f. Allora $\sum_{i,j=1}^{m} c_i\overline{c_j}f(x_i^{-1}x_j) \ge 0$, essendo limite di una successione positiva.

$\Rightarrow$) Sia $F(x,y) = f(x^{-1}y)\varphi(x)\overline{\varphi(y)}$. Chiaramente $F(x,y)\in C_C(G\times G)$, per cui è uniformemente continua. Sia $K = \operatorname{supp}(f)$, da cui $\operatorname{supp}(F)\subseteq K\times K$. Sia $\varepsilon > 0$: posso trovare una copertura di $K\times K$ di aperti della forma $U\times U$, $U\subseteq K$, in cui la variazione di F è minore di ε. Suddividendo opportunamete le eventuali intersezioni, posso sempre supporre che siano a due a due disgiunti, e, con un'ulteriore suddivisione, posso supporre che esista un'unica partizione di K in insiemi disgiuni $E_1, \dots, E_n$ tale che gli aperti della copertura di $K \times K$ siano del tipo $E_{i,j} = E_i \times E_j$. Fisso allora un punto $x_i \in E_i$ $\forall i$, e ho che $|F(x,y) - F(x_i,x_j)| < \varepsilon$, $\forall x, y \in E_i \times E_j$. Allora:

$$\iint_{G\times G} f(x^{-1}y)\varphi(x)\overline{\varphi(y)}\,dx\,dy = \iint_{G\times G} F(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \iint_{E_i\times E_j} F(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i,j=1}^{n} \iint_{E_i\times E_j} F(x_i,y_j)\,dx\,dy -$$
$$\iint_{E_i\times E_j} F(x,y) - F(x_i,y_j)\,dx\,dy$$

Si ha che:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \iint_{E_i\times E_j} F(x_i,y_j)\,dx\,dy = \sum_{i,j=1}^{n} F(x_i,y_j)|E_i||E_j|$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} |E_i|\overline{|E_j|} f(x^{-1}y)\varphi(x)\overline{\varphi(y)} \geq 0$$

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} \iint_{E_i\times E_j} F(x,y) - F(x_i,y_j)\,dx\,dy\right|$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \iint_{E_i\times E_j} \left|F(x,y) - F(x_i,y_j)\,dx\,dy\right|$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon |E_i||E_j| \leq \varepsilon |K|^2$$

Dunque, scegliendo ε sufficientemente piccolo, si ottiene $\iint_{G\times G} f(x^{-1}y)\varphi(x)\overline{\varphi(y)}\,dx\,dy \geq 0$. $\square$

5.2 Funzioni di tipo positivo e rappresentazioni

Lemma 5.3 *Sia π una rappresentazione unitaria di G su uno spazio di Hilbert H, e sia $u \in H$. Allora la funzione $\varphi : G \to \mathbb{C}$ definita come:*

$$\varphi(x) = \big(u, \pi(x)u\big)$$

è di tipo positivo.

Dimostrazione: Si ha:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} c_i\overline{c_j}\varphi(x_i^{-1}x_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} c_i\overline{c_j}\big(u,\pi(x_i^{-1}x_j)u\big)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\big(c_i\pi(x_i)u, c_j\pi(x_j)u\big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i\pi(x_i)u, \sum_{i=1}^{n} c_i\pi(x_i)u\Big)\\ &= \Big\|\sum_{i=1}^{n} c_i\pi(x_i)u\Big\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

□

Lemma 5.4 *Sia K un sottogruppo compatto di G e sia H_K il sottospazio di H formato dai vettori K-invarianti, cioè tali che $\forall k \in K$, $\pi(k)u = u$. Allora, se $u \in H_K$, la funzione di tipo positivo:*

$$\varphi(x) = \big(u, \pi(x)u\big)$$

è biinvariante per K. ***Dimostrazione:***

$$\varphi(k_1xk_2) = \big(u, \pi(k_1xk_2)u\big) = \big(\pi(k_1^{-1})u, \pi(x)\pi(k_2)u\big) = \big(u, \pi(x)u\big) = \varphi(x)$$

□

Teorema 5.5

1. *Sia G un gruppo topologico e K un sottogruppo compatto. Sia φ una funzione* continua *di tipo positivo biinvariante per K. Allora esiste una rappresentazione unitaria (π_φ, H_φ) di G che ammette un vettore u K-invariante e* ciclico *tale che:*

$$\varphi(x) = \big(u, \pi_\varphi(x)u\big)$$

2. *Sia (π', H') un'altra rappresentazione unitaria che ammette un vettore u' con le proprietà descritte nel punto 1. Allora π' e π_φ sono equivalenti, ed esiste un'equivalenza $A : H_\varphi \to H'$ tale che $Au = u'$.*

Dimostrazione:

1. Sia $M_0(G)$ l'insieme delle misure su G *a supporto finito*, cioè del tipo:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{x_i}$$

da cui:

$$\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

Sia poi:

$$V_\varphi = \{f : f = \mu * \varphi, \mu \in M_0(G)\}$$

dove:

$$\mu * \varphi(x) = \int_G \varphi(y^{-1}x)\, d\mu(y) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i^{-1}x)$$

V_φ è l'insieme delle combinazioni lineari delle traslate a sinistra di φ, e ciascuna di queste funzioni è invariante a destra per K essendo φ bi-invariante per K. Introduco in V_φ una forma definita positiva. In particolare, se $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i\varphi(x_i^{-1}x)$ e $g(x) = \sum_{i=1}^m b_i\varphi(y_i^{-1}x)$, pongo:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \overline{b_j} \varphi(x_i^{-1}y_j)$$

è chiaramente sesquilineare essendo $\varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)}$ e, essendo φ di tipo positivo:

$$(f, f) = \sum_{i,j=1}^n a_i \overline{a_j} \varphi(x_i^{-1}x_j) \geq 0$$

Sia ora $N \subseteq V_\varphi$ l'insieme delle funzioni tali che $(f, f) = 0$, e sia $V = \frac{V_\varphi}{N}$. In questo modo, V è uno spazio pre-hilbertiano: sia H la sua chiusura. Costruisco una rappresentazione π di G in H in questo modo: se $f \in V_\varphi$, pongo:

$$\big(\pi(x)f\big)(y) = f(x^{-1}y)$$

π è ben definita, infatti:

- $\pi : V_\varphi \to V_\varphi$: infatti, se $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i\varphi(x_i^{-1}x)$, si ha:

$$\big(\pi(x)f\big)(y) = f(x^{-1}y) = \sum_{i=1}^n a_i\varphi(x_i^{-1}x^{-1}y) = \sum_{i=1}^n a_i\varphi\big((xx_i)^{-1}y\big)$$

- $\pi(x)$ è unitario $\forall x \in G$: infatti:

$$\begin{aligned}\big(\pi(x)f, \pi(x)g\big) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i\overline{b_j}\varphi\big((xx_i)^{-1}(xy_j)\big) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i\overline{b_j}\varphi\big(x_i^{-1}y_j\big) = (f, g)\end{aligned}$$

  Questo implica anche che π passa al quoziente, infatti, se $(f, f) = 0$, si ha che $(\pi(x)f, \pi(x)f) = 0$ e dunque posso pensare $\pi : V \to V$.

- π è un omomorfismo, ovvio.

- π è continua in V_φ. Infatti, se $g_k \to g$, si ha, $\forall f \in V_\varphi$:

$$\begin{aligned}\big\|\pi(g_k)f - \pi(g)f\big\|^2 &= \big\|\pi(g_k)f\big\|^2 + \big\|\pi(g)f\big\|^2 - 2\big(\pi(g_k)f, \pi(g)f\big)\\ &= 2\|f\|^2 - 2\big(\pi(g_k)f, \pi(g)f\big) = 2\sum_{i,j=1}^n a_i a_j \varphi(x_i^{-1}x_j) - \\ &- 2\sum_{i,j=1}^n a_i a_j \varphi(x_i^{-1}g_k^{-1}gx_j) \to 0\end{aligned}$$

  Nell'ultimo passaggio è essenziale la continuità di φ. Chiaramente π è continua anche in V, e dunque *la estendo per continuità a tutto* H: se $h \in H$, trovo $\{f_n\} \subseteq V_\varphi$ tale che $f_n \to h$ e pongo:

$$\pi(x)h = \lim_{n\to\infty} \pi(x)f_n$$

  Essendo $\pi(x)$ unitario, $\{\pi(x)f_n\}$ è di Cauchy, dunque converge. Se poi $f_n \to h$ e $g_n \to h$, si ha $\pi(x)f_n - \pi(x)g_n = \pi(x)(f_n - g_n) \to 0$. Infine, la continuità di π garantisce che tutte le proprietà precedenti, verificate su V_φ, valgono anche su tutto H.

Dalla definizione del prodotto scalare in V_φ, segue che:

$$(\varphi, \pi(x)\varphi) = \varphi(x)$$

$\varphi \in H$ è un vettore invariante per K: $\big(\pi(k)\varphi\big)(x) = \varphi(k^{-1}x) = \varphi(x)$. Inoltre, φ è ovviamente ciclico, in quanto l'insieme delle combinazioni lineari di vettori del tipo $\pi(x)\varphi$ è esattamente V_φ, che per definizione è denso in H. Si ha quindi la tesi per $(\pi_\varphi, H_\varphi) = (\pi, H)$ e $u = \varphi$.

2. Se $f \in V_\varphi$ si ha:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i^{-1}x) = \sum_{i=1}^n a_i \big(\pi_\varphi(x_i)\varphi\big)(x)$$

dunque $f = \sum_{i=1}^n a_i\big(\pi_\varphi(x_i)\varphi\big)$, dove $\varphi = u$. Sia allora A così definita:

$$\begin{aligned}&A : V_\varphi \to H'\\ &\quad A\bigg(\sum_{i=1}^n a_i\big(\pi_\varphi(x_i)\varphi\big)\bigg) = \sum_{i=1}^n a_i\big(\pi'(x_i)u'\big)\end{aligned}$$

Chiaramente $A(\varphi) = u'$, e A è un'isometria, infatti, se $f = \sum_{i=1}^n a_i\big(\pi_\varphi(x_i)\varphi\big)$:

$$\begin{aligned}\|A(f)\|^2 =&\big(A(f), A(f)\big) = \left(\sum_{i=1}^n a_i\pi'(x_i)u', \sum_{i=1}^n a_i\pi'(x_i)u'\right)\\ =& \sum_{i,j=1}^n a_i\overline{a_j}\big(\pi'(x_i)u', \pi'(x_j)u'\big) = \sum_{i,j=1}^n a_i\overline{a_j}\big(u', \pi'(x_i^{-1}x_j)u'\big)\\ =& \sum_{i,j=1}^n a_i\overline{a_j}\varphi(x_i^{-1}x_j) = (f,f) = \|f\|^2\end{aligned}$$

Essendo V_φ denso in H_φ e u' ciclico in H', A si prolunga a un'isometria di tutto H_φ su tutto H', ed è un'equivalenza di rappresentazioni, infatti, se $f = \sum_{i=1}^n a_i\big(\pi_\varphi(x_i)\varphi\big)$:

$$\begin{aligned}\big(A\circ\pi_\varphi(x)\big)f &= A\left(\sum_{i=1}^n a_i\big(\pi_\varphi(xx_i)\varphi\big)\right) = \sum_{i=1}^n a_i\big(\pi'(xx_i)u'\big)\\ &= \pi'(x)\left(\sum_{i=1}^n a_i\big(\pi'(x_i)u'\big)\right) = \big(\pi'(x)\circ A\big)f\end{aligned}$$

e per continuità si estende a tutto H. $\square$

5.3 Funzioni di tipo positivo estremali

Le funzioni di tipo positivo *biinvarianti per* K costituiscono un *cono convesso*, cioè:

- φ_1 e φ_2 sono di tipo positivo biinvarianti per $K \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2$ è di tipo positivo biinvariante per K;
- φ è di tipo positivo biinvariante per K e $\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda\varphi$ è di tipo positivo biinvariante per K.

Notazione: Indico con $P^\natural(G)$ il cono convesso delle funzioni di tipo positivo su G biinvarianti per K.

Ci chiediamo allora quali sono le funzioni *estramali* di $P^\natural(G)$ (intuitivamente i bordi del cono), cioè le funzioni tali che:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 = \lambda_1\varphi,\ \varphi_2 = \lambda_2\varphi,\ \forall\varphi_1, \varphi_2 \in P^\natural(G)$$

Definizione 5.2 Sia φ di tipo positivo e sia (π_φ, H_φ) la rappresentazione di G associata naturalmente a φ come nel teorema 5.5. φ si dice *pura* se (π_φ, H_φ) è irriducibile.

Teorema 5.6 *φ è estremale se e solo se è pura.*

Dimostrazione:

$\Leftarrow$) Sia $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in P^\natural(G)$. Siano $f, g \in V_\varphi$ (v. teorema 5.5), $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i^{-1}x)$, $g(x) = \sum_{i=1}^m b_i \varphi(y_i^{-1}x)$. Avevo definito il prodotto scalare:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \overline{b_j} \varphi(x_i^{-1} y_j)$$

Introduco adesso in V_φ la forma bilineare B analoga a questo prodotto scalare, ma ottenuta considerando φ_1 anzichè φ:

$$B(f, g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \overline{b_j} \varphi_1(x_i^{-1} y_j)$$

B è chiaramente hermitiana e positiva. Inoltre, $B(f, f) \leq (f, f)$, infatti:

$$\begin{aligned} B(f, f) = \sum_{i,j=1}^n a_i \overline{a_j} \varphi_1(x_i^{-1} x_j) &= \sum_{i,j=1}^n a_i \overline{a_j} \varphi(x_i^{-1} x_j) - \\ \sum_{i,j=1}^n a_i \overline{a_j} \varphi_2(x_i^{-1} x_j) &\leq \sum_{i,j=1}^n a_i \overline{a_j} \varphi(x_i^{-1} x_j) = (f, f) \end{aligned}$$

Quindi:

$$|B(f, g)| \leq \sqrt{B(f, f)} \cdot \sqrt{B(g, g)} \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

dove la norma si intende riferita alla classe di equivalenza in V. In particolare, B passa al quoziente, cioè è ben definita in V, ed è continua. Allora, B si estende per continuità a tutto H_φ, e dunque esiste $A \in H_\varphi^*$ tale che $B(f, g) = (Af, g)$. Inoltre, esattamente come per il prodotto scalare (stessa dimostrazione):

$$B\big(\pi_\varphi(x) f, \pi_\varphi(x) g\big) = B(f, g)$$

e questo vale per continuità in tutto H_φ. Allora, $\forall x \in G$:

$$\begin{aligned} \big(A\pi_\varphi(x) f, g\big) &= B\big(\pi_\varphi(x) f, g\big) = B\big(f, \pi_\varphi(x^{-1}) g\big) \\ &= \big(Af, \pi_\varphi(x^{-1}) g\big) = \big(\pi_\varphi(x) Af, g\big) \end{aligned}$$

e dunque:

$$A \circ \pi_\varphi(x) = \pi_\varphi(x) \circ A$$

e dunque, essendo π_φ irriducibile, $A = \lambda I$. Quindi:

$$\begin{aligned} &B(f, g) = \lambda (f, g) \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \overline{b_j} \varphi_1(x_i^{-1} y_j) = \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \overline{b_j} \varphi(x_i^{-1} y_j) \end{aligned}$$

Per $i = 0, j = 1, b_1 = 1$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(y_1) &= \lambda \varphi(y_1) \\ \varphi_1 &= \lambda \varphi \end{aligned}$$

e dunque φ è estremale.

$\Rightarrow$) Sia H_φ fattorizzabile in:

$$H_\varphi = H_1 \oplus H_2$$

e siano P_1 e $P_2 = I - P_1$ i due proiettori su H_1 e H_2. Siano poi:

$$u_1 = P_1 u; \quad u_2 = P_2 u$$

e:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \big(u_1, \pi_\varphi(x)u_1\big) = \big(u, \pi_\varphi(x)u_1\big) = \big(u_1, \pi_\varphi(x)u\big)\\ \varphi_2(x) &= \big(u_2, \pi_\varphi(x)u_2\big) = \big(u, \pi_\varphi(x)u_2\big) = \big(u_2, \pi_\varphi(x)u\big)\end{aligned}$$

Allora è chiaro che $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, e φ_1 e φ_2 sono di tipo positivo per il lemma 5.3. Essendo H_1 e H_2 sottorappresentazioni, P_1 e P_2 commutano con π_φ, e dunque:

$$\begin{aligned}\varphi_1(k_1xk_2) &= \big(u, \pi_\varphi(k_1xk_2)u_1\big) = \big(u, \pi_\varphi(k_1xk_2)P_1(u)\big)\\ &= \big(\pi_\varphi(k_1^{-1})u, P_1\pi_\varphi(x)\pi_\varphi(k_2)(u)\big) = \big(u, P_1\pi_\varphi(x)(u)\big)\\ &= \big(u, \pi_\varphi(x)P_1(u)\big) = \varphi_1(x)\end{aligned}$$

Dunque, per ipotesi, $\varphi_1 = \lambda\varphi$, e quindi, $\forall x \in G$:

$$\begin{aligned}&\big(u_1, \pi_\varphi(x)u\big) = \lambda\big(u, \pi_\varphi(x)u\big)\\ &\big(u_1 - \lambda u, \pi_\varphi(x)u\big) = 0\end{aligned}$$

Essendo u ciclico, questo implica $u_1 = \lambda u$. Quindi, se $\lambda \neq 0$, allora $u \in H_1$ e quindi, essendo ciclico, $H_\varphi = H_1$. Se $\lambda = 0$, per lo stesso motivo $H_\varphi = H_2$. $\square$

5.4 Funzioni di tipo positivo e forme lineari su $L^1(G)^\natural$

Notazione: Sia $f \in L^1(G)$. Pongo allora:

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})$$

Se φ è una funzione *continua* di tipo positivo, φ è limitata essendo $|\varphi(x)| \leq \varphi(1_G)$, e quindi possimo associare ad essa la forma lineare su $L^1(G)$:

$$L(f) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})\,dx$$

Allora:

$$\begin{aligned}L(\tilde{f} * f) &= \int_G \tilde{f} * f(x)\varphi(x^{-1})\,dx = \iint_{G\times G} \tilde{f}(y)f(y^{-1}x)\varphi(x^{-1})\,dy\,dx\\ &= \iint_{G\times G} \overline{f(y^{-1})}f(y^{-1}x)\varphi(x^{-1})\,dy\,dx = \iint_{G\times G} \overline{f(y)}f(yx)\varphi(x^{-1})\,dy\,dx\\ &= \iint_{G\times G} \overline{f(y)}f(x)\varphi(x^{-1}y)\,dy\,dx \geq 0\end{aligned}$$

Definizione 5.3 Sia L una forma lineare su $L^1(G)$. L è detta *positiva* se:

$$L(\tilde{f} * f) \geq 0 \quad \forall f \in L^1(G)$$

Definizione 5.4 Sia L una forma lineare su $L^1(G)$. L è detta *biinvariante per* K se:

$$L(f) = L(f^\natural) \quad \forall f \in L^1(G)$$

Osservazione: Se L è biinvariante per K, si ha che, $\forall k \in K$, $L(f) = L(f \circ R^k)$ e $L(f) = L(f \circ L^k)$. Infatti:

$$L(f \circ L^k) = L\big((f \circ L^k)^\natural\big) = L(f^\natural) = L(f)$$

Teorema 5.7 *Sia L una forma lineare su $L^1(G)$ positiva e biinvariante per K. Allora esiste un'unica funzione φ* continua, di tipo positivo e biinvariante per K *tale che:*

$$L(f) = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})\,dx$$

Inoltre:

$$\|L\| = \varphi(1_G)$$

Per la dimostrazione, utilizzerò il seguente lemma:

Lemma 5.8 *Sia $f \in L^1(G)$ e π una rappresentazione di G in H. Allora, esiste un operatore $\pi(f) \in U(H)$ tale che, $\forall v, w \in H$:*

$$\big(\pi(f)v, w\big) = \int_G \big(\pi(x)v, w\big) f(x)\,dx$$

Inoltre, si ha, $\forall v, w \in H$:

$$\big(\pi(\tilde{f})v, w\big) = \big(v, \pi(f)w\big)$$

Dimostrazione: L'applicazione:

$$\begin{aligned} \psi_f : H \times H &\to \mathbb{C} \\ (v, w) &\to \int_G \big(\pi(x)v, w\big) f(x)\,dx \end{aligned}$$

è bilineare e continua, dunque, per il teorema di Riesz, esiste un operatore $\pi(f)$ tale che $\psi_f(v, w) = \big(\pi(f)v, w\big)$, come richiesto. Inoltre:

$$\begin{aligned} \big(\pi(\tilde{f})v, w\big) &= \int_G \big(\pi(x)v, w\big)\tilde{f}(x)\,dx = \int_G \big(v, \pi(x^{-1})w\big)\overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})\,dx \\ &= \int_G \big(v, \pi(x)w\big)\overline{f(x)}\,dx = \overline{\int_G \big(\pi(x)w, v\big) f(x)\,dx} \\ &= \overline{\big(\pi(f)w, v\big)} = \big(v, \pi(f)w\big) \end{aligned}$$

□

Dim teorema: Definiamo in $L^1(G)$ la forma bilineare:

$$B(f,g) = L(\tilde{g} * f)$$

B è chiaramente sesquilineare ed è definita positiva per ipotesi. Sia allora $K = \{f \in L^1(G) : B(f,f) = 0\}$: B è un prodotto scalare su $\frac{L^1(G)}{K}$, e dunque lo completiamo ad uno spazio di Hilbert H. Si ha poi:

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{f} * f\|_{L^1} \leq \|\tilde{f}\|_{L^1}\|f\|_{L^1} = \|f\|^2_{L^1} \\
&B(f,f) = L(\tilde{f} * f) \leq \|L\| \cdot \|\tilde{f} * f\|_{L^1} \leq \|L\| \cdot \|f\|^2_{L^1} \\
&|B(f,g)|^2 \leq B(f,f)B(g,g) \leq \|L\|^2\|f\|^2_{L_1}\|g\|^2_{L_1}
\end{aligned}$$

Poniamo poi, per $f \in L^1(G)$:

$$\big(\pi(g)f\big)(x) = f(g^{-1}x)$$

Si verifica facilmente che π è ben definita ed è una rappresentazione unitaria di G in H.

Per ogni intorno V di 1_G in G costruisco una funzione ψ_V tale che:

- $\psi_V \in C_C(G)$
- $\text{supp}(\psi_V) \subseteq V$
- $\int_G \psi_V(x)\,dx = 1$
- $\psi_V(x) = \psi_V(x^{-1})$, $\forall x \in G$

Si ha allora:

$$\lim_{V \to 1_G} \psi_V * f = \lim_{V \to 1_G} f * \psi_V = f$$

Si verifica banalmente che le quattro proprietà elencate valgono anche per $\tilde{\psi}_V$, per cui si ha anche $\lim\limits_{V \to 1_G} \tilde{\psi}_V * f = \lim\limits_{V \to 1_G} f * \tilde{\psi}_V = f$. Vale:

$$|B(f,\tilde{\psi}_V)|^2 \leq B(f,f)B(\tilde{\psi}_V,\tilde{\psi}_V)$$

Ma:

$$\begin{aligned}
&B(\tilde{\psi}_V,\tilde{\psi}_V) \leq \|L\| \cdot \|\tilde{\psi}_V\|^2_{L^1} = \|L\| \\
&\lim_{V \to 1_G} B(f,\tilde{\psi}_V) = \lim_{V \to 1_G} L(\tilde{\psi}_V * f) = L\big(\lim_{V \to 1_G} (\tilde{\psi}_V * f)\big) = L(f)
\end{aligned}$$

Dunque:

$$|L(f)|^2 \leq \|L\| \cdot B(f,f)$$

Questo significa che L è un funzionale limitato anche rispetto alla norma indotta da B su H, e quindi esiste un vettore $u \in H$ tale che:

$$L(f) = B(f,u) \quad \forall f \in L^1(G)$$

u è invariante per K, infatti:

$$B\big(f, \pi(k)u\big) = B\big(\pi(k^{-1})f, u\big) = L(f \circ L^k) = L(f) = B(f, u)$$

Si ha inoltre che (usando l'operatore $\pi(f)$ come definito nel lemma 5.8) $\pi(f)g = f * g$. Infatti:

$$\big(\pi(f)g\big)(y) = \int_G \big(\pi(x)g\big)(y) \cdot f(x)\, dx = \int_G g(x^{-1}y) f(x)\, dx = f * g(y)$$

Allora, per $g, f \in H$:

$$B(g, f) = L(\tilde{f} * g) = (\tilde{f} * g, u) = \big(\pi(\tilde{f})g, u\big) = \big(g, \pi(f)u\big)$$

e dunque si ha $\pi(f)u = f$. Sia allora:

$$\varphi(x) = \big(u, \pi(x)u\big) = \big(\pi(x^{-1})u, u\big)$$

φ è continua, di tipo positivo e bi-invariante per K, e si ha:

$$L(f) = B(f, u) = \big(\pi(f)u, u\big) = \int_G \big(\pi(x)u, u\big) f(x)\, dx = \int_G f(x)\varphi(x^{-1})\, dx$$

Infine, essendo $\big|\varphi(x)\big| \leq \varphi(1_G)$, si ha:

$$\big|L(f)\big| \leq \varphi(1_G) \cdot \|f\|_{L^1}$$

quindi $\|L\| \leq \varphi(1_G)$. Ma:

$$\begin{aligned}\lim_{V \to 1_G} L(\psi_V) &= \lim_{V \to 1_G} \int_G \psi_V(x)\varphi(x^{-1})\, dx \\ &= \lim_{V \to 1_G} \int_G \psi_V * \varphi(1_G)\, dx = \varphi(1_G)\end{aligned}$$

e quindi $\|L\| = \varphi(1_G)$. □

Notazione: Indico con $P_1(G)^\natural$ l'insieme delle funzioni φ continue, di tipo positivo e biinvarianti per K tali che $\varphi(1_G) \leq 1$.

Per il teorema $P_1(G)^\natural \subseteq L^\infty(G)$ pensando $L^\infty(G)$ come il duale di $L^1(G)$. E' anche contenuto nella bolla unitaria essendo $|\varphi(x)| \leq \varphi(1_G) \leq 1$. $L^\infty(G)$ può essere munito della topologia debole-$*$: penso quindi $P_1(G)^\natural$ sottospazio topologico di $L^\infty(G)$ rispetto a tale topologia.

Corollario 5.9 (del teorema) *$P_1(G)^\natural$ è compatto in $L^\infty(G)$.*

Dimostrazione: è noto che la bolla unitaria di $L^\infty(G)$ è compatta rispetto a tale topologia, per cui basta dimostrare che $P_1(G)^\natural$ è chiuso. Sia dunque $\{L_n\}_{n \in N} \subseteq P_1(G)^\natural$, $L_n \xrightarrow{*} L$. Allora, anche L è positiva, in quanto, per definizione di convergenza debole, $L(\tilde{f} * f) = \lim_{n \to \infty} L_n(\tilde{f} * f) \geq 0$. Per lo stesso motivo, L è biinvariante per K. Infine, $\|L_n\| \to \|L\|$, per cui $\|L\| \leq 1$. Allora, per il teorema 5.7, $L \in P_1(G)^\natural$. □

Capitolo 6

Trasformata di Fourier sferica

Sia (G, K) una coppia di Gelfand, e sia Σ lo spettro dell'algebra di Banach $L^1(G)^\natural$. Per il teorema 2.13, Σ si identifica all'insieme delle funzioni sferiche limitate: se $\tilde{\omega} \in \Sigma$, esiste unica $\omega \in L^\infty(G)$ sferica tale che:

$$\tilde{\omega}(f) = \int_G f(x)\omega(x^{-1})\, dx$$

In seguito utilizzerò lo stesso simbolo ω sia per il funzionale sia per la funzione L^∞ ad esso associata.

Definizione 6.1 Sia $f \in L^1(G)^\natural$. Si dice *trasformata di Fourier sferica* di f la funzione:

$$\begin{aligned} &\hat{f} : \Sigma \to \mathbb{C} \\ &\hat{f}(\omega) = \omega(f) = \int_G f(x)\omega(x^{-1})\, dx \end{aligned}$$

Per $\omega \in \Sigma$, si ha chiaramente $\hat{f}(\omega) = \chi_\omega(f)$, dove χ_ω è l'applicazione 2.2 pag. 8. In particolare, essendo ω sferica, si ha:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g} &= \hat{f} \cdot \hat{g} \\ f * \omega &= \hat{f}(\omega) \cdot \omega \end{aligned}$$

Su Σ possiamo introdurre la *topologia di Gelfand*, ovvero la topologia debole-$*$. Dunque:

$$\omega_n \to \omega \Leftrightarrow \omega_n(f) \to \omega(f),\ \forall f \in L^1(G)^\natural$$

Notazione: Indico con $C_0(\Sigma)$ l'insieme delle funzioni φ continue su Σ che tendono a 0 all'infinito, ovvero tali che $\forall \varepsilon > 0$ trovo un compatto $K \subseteq \Sigma$ tale che $\forall \omega \in K^{\complement}$ si ha $|\varphi(\omega)| < \varepsilon$.

Teorema 6.1 *L'applicazione:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} : L^1(G)^\natural &\to C_0(\Sigma) \\ f &\to \hat{f} \end{aligned}$$

è un omomorfismo di algebre di Banach, ed è la trasformata di Gelfand dell'algebra $L^1(G)^\natural$. Inoltre, la mappa:

$$\begin{aligned} \psi : L^1(G) \times \Sigma &\to \mathbb{C} \\ \psi(f, \omega) &= \hat{f}(\omega) \end{aligned}$$

è continua.

Dimostrazione: $\mathfrak{F}$ è la trasformata di Gelfand di $L^1(G)^\natural$ per definizione (la sua immagine è $C_0(\Sigma)$ in quanto $L^1(G)^\natural$ non è unitaria). Sia allora $(f_0, \omega_0) \in L^1(G)^\natural \times \Sigma$ e sia $\varepsilon > 0$: essendo $\hat{f}_0$ continua, scelto un intorno $V(\omega_0)$ tale che $\left|\hat{f}_0(\omega) - \hat{f}_0(\omega_0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ per $\omega \in V$. Considero l'intorno $U = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f_0) \times V$. Allora, per $(f, \omega) \in U$:

$$\begin{aligned} \left|\psi(f, \omega) - \psi(f_0, \omega_0)\right| &= \left|\hat{f}(\omega) - \hat{f}_0(\omega_0)\right| \\ &\leq \left|\hat{f}(\omega) - \hat{f}_0(\omega)\right| - \left|\hat{f}_0(\omega) - \hat{f}_0(\omega_0)\right| \\ &= \left|\omega(f - f_0)\right| - \left|\hat{f}_0(\omega) - \hat{f}_0(\omega_0)\right| \\ &\leq \|\omega\| \cdot \|f - f_0\| - \left|\hat{f}_0(\omega) - \hat{f}_0(\omega_0)\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

essendo $\|\omega\| = 1$. $\square$

Teorema 6.2 *La topologia di Gelfand su Σ coincide con la topologia della convergenza uniforme sui compatti di G delle funzioni L^∞ associate, ovvero:*

$$\omega_n \to \omega \Leftrightarrow \omega_n|_K \to \omega|_K \textit{ unif. } \forall K \subseteq G \textit{ compatto}$$

Inoltre, Σ con questa topologia è localmente compatto.

Dimostrazione:

Passo 1: L'applicazione:

$$\begin{aligned} \eta : \Sigma \times G &\to \mathbb{C} \\ \eta(\omega, x) &= \omega(x) \end{aligned}$$

è continua. Infatti, si ha che, per $f \in L^1(G)$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) \cdot \omega(x) = f * \omega(x) &= \int_G f(y)\omega(y^{-1}x)\, dy \\ &= \int_G f(xy)\omega(y^{-1})\, dy = \int_G f_x(y)\omega(y^{-1})\, dy = \hat{f}_x(\omega) \end{aligned}$$

$$\omega(x) = \frac{f * \omega(x)}{\hat{f}_x(\omega)}$$

supponendo di aver scelto f tale che $\hat{f}_x(\omega) \neq 0$. Essendo la mappa $x \to f_x$ continua, si ha la tesi.

Passo 2: Gli insiemi del tipo:

$$N(K, \varepsilon) = \{\omega \in \Sigma : |\omega(x)| < \varepsilon \; \forall x \in K\}, \; K \subseteq G \text{ compatto}, \; \varepsilon > 0$$

al variare di K ed ε sono intorni dell'origine per la topologia della convergenza uniforme sui compatti: essi ed i loro traslati sono una base per tale topologia. Infatti, è chiaro che sono aperti, essendo $N(K,\varepsilon)^{\complement}$ chiuso: se $|\omega_n(x)| \geq \varepsilon \; \forall x \in K$, e $\omega_n \to \omega$ loc. unif., si ha $|\omega_n(x)| \to |\omega(x)|$, e dunque anche $|\omega(x)| \geq \varepsilon$. La loro unione esaurisce tutto Σ, essendo chiaramente $\omega \in \omega + N(K,\varepsilon)$, $\forall K$, $\forall \varepsilon > 0$. Inoltre, sia:

$$\varphi \in \big(\omega_1 + N(K_1, \varepsilon_1)\big) \cap \big(\omega_2 + N(K_2, \varepsilon_2) = \tilde{N}\big)$$

Allora, poichè ω è continua (per il passo 1), su un compatto il suo modulo ammette massimo:

$$\begin{aligned} \big|\varphi(x) - \omega_1(x)\big| \leq \delta_1 < \varepsilon_1 \; \forall x \in K \\ \big|\varphi(x) - \omega_2(x)\big| \leq \delta_2 < \varepsilon_2 \; \forall x \in K \end{aligned}$$

Siano $K = K_1 \cup K_2$ e $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - \delta_1, \varepsilon_2 - \delta_2\}$: dimostro che $\varphi + N(K,\varepsilon) \subseteq \tilde{N}$. Infatti, sia $\psi \in \varphi + N(K, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \forall x \in K_1 : \; \big|\psi(x) - \omega_1(x)\big| &\leq \big|\psi(x) - \varphi(x)\big| + \big|\varphi(x) - \omega_1(x)\big| < \\ &< (\varepsilon_1 - \delta_1) + \delta_1 = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Similmente per $\omega_2 + N(K_2, \varepsilon_2)$.

Si ha che $\omega_n \to \omega$ loc. unif. se e solo se, fissato qualunque $K \subseteq G$ compatto e qualunque $\varepsilon > 0$, si ha definitivamente $\big|\omega_n(x) - \omega(x)\big| < \varepsilon \; \forall x \in K$, e dunuqe def. $\omega_n \in \omega + N(K, \varepsilon)$: quindi, $\omega_n \to \omega$ loc. unif. se e solo se ω_n è definitivamente contenuto in qualunque intorno base di ω, dunque si ha la coincidenza delle due topologie.

Passo 3: Gli insiemi $\omega + N(K, \varepsilon)$ sono aperti anche rispetto alla topologia di Gelfand. Infatti, sia $\omega_0 \in \tilde{\omega} + N(K, \varepsilon)$: se $x_0 \in K$, $\big|\omega_0(x_0) - \tilde{\omega}(x_0)\big| < \varepsilon$. Per la continuità di η (passo 1), posso scegliere un intorno U_{x_0} di x_0 e un intorno V_{x_0} di ω_0 tali che:

$$\big|\omega(x) - \tilde{\omega}(x)\big| < \varepsilon \; \forall x \in U, \, \forall \omega \in V$$

Al variare di x_0 in K, gli intorni U_{x_0} coprono K, dunque, per compattezza, estraggo una sottocopertura finita $U_{x_0}, \ldots, U_{x_n}$: sia $V = V_{x_0} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. Allora V è un intorno di ω_0 rispetto alla topologia di Gelfand, e, per costruzione, $V \subseteq \tilde{\omega} + N(K, \varepsilon)$.

Passo 4: Gl intorni della topologia di Gelfand sono aperti anche rispetto alla topologia della convergenza uniforme. Sia infatti $\omega_0 \in \Sigma$ e V un suo intorno rispetto alla topologia di Gelfand. Dimostro che $\omega_0 + N(K,\varepsilon) \subseteq V$ per opportuni K ed ε. Se $f \in L^1(G)^\natural$, pongo $W^f_\delta = \{\omega \in \Sigma : \left|\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega_0)\right| < \delta\}$. W^f è aperto essendo retroimmagine del disco di raggio δ centrato in $\hat{f}(\omega_0)$ in $\mathbb{C}$. Poichè le intersezioni finite di controimmagini di aperti sono una base per la topologia debole, si ha che, per opportune $f_1, \dots, f_n \in L^1(G)^\natural$:

$$W^{f_1} \cap \dots \cap W^{f_n} \subseteq V$$

Per densità di $C_C(G)^\natural$ in $L^1(G)^\natural$, possiamo assumere $f_1, \dots, f_n \in C_C(G)^\natural$, e dunque tutte nulle nel complementare di un opportuno compatto $K \subseteq G$. Scelgo allora:

$$\varepsilon < \frac{\delta}{\max\limits_{i \in \{1,\dots,n\}} \|f_i\|_{L^1}}$$

Allora, se $\omega \in \omega_0 + N(K,\varepsilon)$:

$$\left|\hat{f}_i(\omega) - \hat{f}_i(\omega_0)\right| \leq \|f_i\|_{L^1} \cdot \|\omega - \omega_0\|_{L^\infty} \leq \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \|f_i\|_{L^1} \cdot \varepsilon < \delta$$

e dunque $\omega \in \omega_0 + N(K,\varepsilon) \subseteq V$. □

Notazione: Indico con Ω l'insieme delle fuzioni sferiche di tipo positivo su G.

Lemma 6.3 *Ω è chiuso in Σ. Inoltre, se $A = \{\hat{f}|_\Omega : f \in L^1(G)^\natural\}$, A è denso in $C_0(\Omega)$.*

Dimostrazione: Chiaramente $\Omega \subseteq \Sigma$ essendo una funzione di tipo positivo limitata. Inoltre, se $\{\Omega_n\}_{n\in N} \subseteq \Omega$ e $\omega_n \to \omega$, si ha, per definizione di topologia di Gelfand:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \omega(x_i^{-1}x_j)c_i\overline{c_j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \omega_n(x_i^{-1}x_j)c_i\overline{c_j} \geq 0$$

e dunque $\omega \in \Omega$. La densità di A è una conseguenza immediata del teorema di Stone-Weierstrass. □

Teorema 6.4 (Bochner-Godement) *Sia (G,K) una coppia di Gelfand, e sia φ una funzione continua su G, di tipo positivo e biinvariante per K. Allora esiste un'*unica *misura di Radon μ su Ω, positiva e limitata, tale che:*

$$\varphi(x) = \int_\Omega \omega(x)\, d\mu(\omega)$$

Nella dimostrazione utilizzerò il noto teorema di analisi fuzionale (si veda [5] p. 75):

Teorema di Krein-Milman: Sia X uno spazio vettoriale toplogico tale che X^* separa i suoi punti (cioè, $\forall x, y \in X,\ x \neq y \Rightarrow \exists f \in X^* : f(x) \neq f(y)$). Sia $K \subseteq X$ non vuoto compatto e convesso: allora K è l'inviluppo convesso dei suoi punti estremali (cioè dei suoi punti che non sono interni ad un segmento i cui estremi appartengono a K).

Dim. teorema: Verifico innanzi tutto l'unicità. Sia $f \in L^1(G)^\natural$. Allora:

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\varphi(x^{-1})\,dx &= \int_G f(x)\int_\Omega \omega(x^{-1})\,d\mu(\omega)\,dx \\ &= \int_\Omega \int_G f(x)\omega(x^{-1})\,dx\,d\mu(\omega) = \int_\Omega \hat{f}(\omega)\,d\mu(\omega) = \mu\big(\hat{f}|_\Omega\big)\end{aligned} \tag{6.1}$$

Allora μ è univocamente determinata su $\{\hat{f}|_\Omega : f \in L^1(G)^\natural\}$, e quindi, per il lemma 6.3, si ha l'unicità.

Dimostro l'esistenza. Si ha che $P^1(G)^\natural$ è un convesso compatto di $L^1(G)$ (corollario prec.), e i suoi punti estremali sono le funzioni sferiche di tipo positivo. Siano $M(\Omega)$ l'insieme delle misure di Radon limitate su Ω e $M_1^+(\Omega) \subseteq M(\Omega)$ l'insieme delle misure positive μ tali che $\mu(\Omega) \leq 1$. E' noto dall'analisi funzionale che il duale di $M(\Omega)$ è $C_0(\Omega)$ e che, rispetto alla topologia debole-$*$, $M_1^+(\Omega)$ è compatto. Considero allora l'applicazione:

$$\begin{aligned} T : M_1^+(\Omega) &\to P_1(G)^\natural \\ T\mu(x) &= \int_\Omega \omega(x)\,d\mu(\omega)\end{aligned}$$

Allora, per la formula (6.1):

$$\int_G f(x)T\mu(x^{-1})\,dx = \mu\big(\hat{f}|_\Omega\big)$$

Allora, se $\mu_n \to \mu$ (top. debole-$*$), per definizione $\mu_n\big(\hat{f}|_\Omega\big) \to \mu\big(\hat{f}|_\Omega\big)$, dunque $\int_G f(x)T\mu_n(x^{-1})\,dx \to \int_G f(x)T\mu(x^{-1})\,dx\ \ \forall f \in L^1(G)$, dunque $T\mu_n \xrightarrow{L^\infty} T\mu$: questo dimostra che T è continua, e quindi che $T\big(M_1^+(\Omega)\big)$ è compatto. Inoltre, se $\omega_0 \in \Omega$, si ha $T\delta_{\omega_0} = \omega_0$ e dunque $T\big(M_1^+(\Omega)\big)$ contiene i punti estremali di $P_1(G)^\natural$: essendo T lineare, contiene anche il loro inviluppo convesso, che per il teorema di Krein-Milman è tutto $P_1(G)^\natural$. Dunque T è suriettiva. $\square$

Teorema 6.5 *Data $f \in L^1(G)^\natural \cap C(G)^\natural$ di tipo positivo, sia μ_f la misura determinata da f nel teorema di Bochner-Godement. Allora esiste un'unica misura di Radon positiva σ su Ω tale che, $\forall f \in L^1(G)^\natural \cap C(G)^\natural$:*

$$\mu_f = \hat{f} \cdot \sigma$$

Dimostrazione: Siano $f, g \in L^1(G)^\natural \cap C(G)^\natural$ di tipo positivo. Allora:

$$f(x) = \int_\Omega \omega(x)\, d\mu_f(\omega)$$
$$g(x) = \int_\Omega \omega(x)\, d\mu_g(\omega)$$

Chiaramaente si ha $f*g \in L^1(G)^\natural \cap C(G)^\natural$ (è necessario chiedere $f, g \in L^1(G)$ proprio perchè sia ben definita la convoluzione). In particolare:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_G f(y) g(y^{-1}x)\, dy = \int_G \int_\Omega \omega(y) g(y^{-1}x)\, d\mu_f(\omega)\, dy \\ &= \int_\Omega \omega * g(x)\, d\mu_f(\omega) = \int_\Omega \omega(x)\hat{g}(\omega)\, d\mu_f(\omega) \end{aligned}$$

e dunque:

$$\mu_{f*g} = \hat{g} \cdot \mu_f$$

Essendo (G, K) una coppia di Gelfand, si ha $f * g = g * f$, e dunque:

$$\hat{g} \cdot \mu_f = \hat{f} \cdot \mu_g$$

Sia allora $\Omega_f = \{\omega \in \Omega : \hat{f}(\omega) \neq 0\}$. Ω_f è un aperto essendo $\hat{f}$ continua, e $\forall \omega \in \Omega$ posso trovare f tale che $\omega \in \Omega_f$, in quanto $\exists f : \hat{f}(\omega) \neq 0 \Leftrightarrow \exists f : \omega(f) \neq 0 \Leftrightarrow \omega|_{L^1(G)^\natural} \neq 0 \Leftrightarrow \omega|_{L^1(G)} \neq 0 \Leftrightarrow \omega \neq 0$, e $\omega \neq 0$ in quanto sferica. Allora, su Ω_f costruisco la misura:

$$\sigma_f = \frac{1}{\hat{f}} \mu_f$$

Allora, dall'equazione precedente si deduce che, se $\Omega_f \cap \Omega_g \neq \emptyset$:

$$\frac{1}{\hat{f}} \mu_f = \frac{1}{\hat{g}} \mu_g \Rightarrow \sigma_f = \sigma_g$$

Allora, unendo tutte le misure σ_f al variare di f, si ottiene un'unica misura σ su Ω tale che:

$$\mu_f = \hat{f} \cdot \sigma, \ \forall f \in L^1(G)^\natural \cap C(G)^\natural \text{ di tipo positivo}$$

□

Definizione 6.2 La misura σ introdotta nel teorema 6.5 è detta *misura di Plancherel*.

Teorema 6.6 (Plancherel-Godement) *Valgono le seguenti proprietà della trasformata di Fourier sferica:*

- Formula di inversione: *Se $f \in L^1(G)^\natural \cap C(G)^\natural$ di tipo positivo, allora $\hat{f}$ è integrabile rispetto alla misura di Plancherel e si ha:*

$$f(x) = \int_\Omega \omega(x)\hat{f}(\omega)d\sigma(\omega)$$

- Formula di Plancherel: *Se $f \in L^1(G)^\natural \cap L^2(G)^\natural$, allora $\hat{f} \in L^2(\Omega, \sigma)$ e si ha:*

$$\int_G \left|f(x)\right|^2 dx = \int_\Omega \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\sigma(\omega)$$

- *La trasformata di Fourier sferica:*

$$f \in L^1(G)^\natural \cap L^2(G)^\natural \to \hat{f} \in L^2(\Omega, \sigma)$$

  si prolunga a un'isometria di tutto $L^2(G)^\natural$ su $L^2(\Omega, \sigma)$.

Dimostrazione: La formula di inversione segue banalmente dall'uguaglianza $\mu_f = \hat{f} \cdot \sigma$. Per quanto riguarda la formula di Plancherel, sia $h = f * \tilde{f}$. In particolare (ricordando che G è unimodulare):

$$h(x) = \int_G f(y)\tilde{f}(y^{-1}x)\,dy = \int_G f(y)\overline{f(x^{-1}y)}\,dy = \int_G f(xy)\overline{f(y)}\,dy$$

Allora $\hat{h} = \hat{f} \cdot \overline{\hat{f}} = \left|\hat{f}\right|^2$. Dalla formula di inversione, essendo $\omega(1_G) = 1$ perchè ω è sferica:

$$\int_G \left|f(x)\right|^2 dx = h(1_G) = \int_\Omega \omega(1_G)\hat{h}(\omega)d\sigma(\omega) = \int_\Omega \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\sigma(\omega)$$

Infine, basta dimostrare che l'insieme:

$$A = \{\hat{f} : f \in L^1(G)^\natural \cap L^2(G)^\natural\}$$

è denso in $L^2(\Omega, \sigma)$. Sia $F \in C_0(\Sigma)$.

Capitolo 7

Esempi di Coppie di Gelfand

7.1 Spazio Euclideo

Sia $G = SO(n) \ltimes_\varphi \mathbb{R}^n$, con $\varphi(L)(\underline{v}) = L\underline{v}$ per $L \in SO(n)$ e $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, e sia $K = SO(n)$. Dimostro che (G, K) è una coppia di Gelfand. G è il gruppo delle rototraslazioni di $\mathbb{R}^n$, ponendo banalmente:

$$(x, a) \in G,\ y \in \mathbb{R}^n \ \Rightarrow\ (x, a).y = x.y + a$$

dove $x.y$ è la rotazione x applicata a y. Infatti:

$$\big((x_1, a_1)(x_2, a_2)\big).y = (x_1, a_1).(x_2.y + a_2) = x_1x_2.y + x_1.a_2 + a_1$$

da cui:

$$\begin{aligned}
&(x_1, a_1)(x_2, a_2) = (x_1x_2,\ x_1.a_2 + a_1)\\
&(x, a)^{-1} = (x^{-1},\ -x^{-1}.a)
\end{aligned}$$

In particolare, G/K si identifica con $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
(x_1, a_1)^{-1}(x_2, a_2) \in K &\Leftrightarrow (x_1^{-1},\ -x_1^{-1}.a_1)(x_2, a_2) \in K \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (x_1^{-1}x_2,\ x_1^{-1}.a_2 - x_1^{-1}.a_1) \in K \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x_1^{-1}.a_2 = x_1^{-1}.a_1 \Leftrightarrow a_2 = a_1
\end{aligned}$$

Identifico quindi il laterale $[(x, a)]$ con (id, b) e quindi con b. Inoltre:

$$(x, a)(id, b) = (x,\ x.b + a)$$

e dunque, se $(id, b) \cong b$ e $(x,\ x.b + a) \cong x.b + a$, si ha che $G/K \cong \mathbb{R}^n$ è esattamente lo spazio su cui G opera come gruppo delle rototraslazioni.

Se allora introduciamo su $\mathbb{R}^n$ la distanza euclidea, è chiaro che questa è invariante per G e che, per $n \geq 2$, l'azione di G è doppiamente transitiva: infatti, se $d(x, y) = d(x', y')$, basta applicare la traslazione che porta il segmento $[x, y]$ nell'origine, la rotazione che lo porta ad essere parallelo a $[x', y']$, e infine la traslazione che lo porta a coincidere con lo stesso $[x', y']$. Dunque (G, K) *è una coppia di Gelfand.*[1]

Vediamo adesso la caratterizzazione delle funzioni biinvarianti per K. Si ha che:

$$\varphi\big((k_1, 0)(x, a)(k_2, 0)\big) = \varphi\big((k_1 x,\ k_1.a)(k_2, 0)\big) = \varphi(k_1 x k_2,\ k_1.a)$$

Dunque se $\varphi \in C_C^\natural(G)$:

$$\varphi(k_1 x k_2,\ k_1.a) = \varphi(x, a)$$

Allora, se $k_1 = id$, si ha:

$$\varphi(x k_2,\ a) = \varphi(x, a)$$

e dunque, essendo k_2 generico, si ottiene che in realtà φ non dipende dalla prima componente. Dunque pongo:

$$\varphi(x, a) = \tilde{\varphi}(a)$$

con $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Se poi $k_2 = id$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi(k_1 x,\ k_1.a) &= \varphi(x, a) \\ \tilde{\varphi}(k_1.a) &= \tilde{\varphi}(a) \end{aligned}$$

e dunque, essendo k_1 generica, $\tilde{\varphi}$ *è radiale.*

Dunque: *le funzioni su G biinvarianti per K si identificano con le funzioni radiali su $\mathbb{R}^n \cong G/K$.* Questa identificazione preserva la convoluzione: si verifica facilmente che

$$\varphi * \psi(x, a) = \tilde{\varphi} * \tilde{\psi}(a)$$

A causa della doppia transitività, $\mathbb{D}(G/K)$ è generata dall'operatore di Laplace-Beltrami, che in questo caso coincide con il laplaciano. Dunque le funzioni sferiche sono tutte e sole le autofunzioni del laplaciano che valgono 1 nell'origine.

7.2 Le sfere

Sia $G = SO(n+1)$, pensato come il gruppo delle rotazioni sulla sfera S^n, e sia $K = SO(n)$ pensato come lo stabilizzatore di $\underline{e}_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Introduco su S^n la distanza:

$$d(x, y) = r : \ \cos r = x_0 y_0 + \cdots + x_n y_n,\ 0 \le r \le \pi$$

[1] Il caso $n = 1$ è un'eccezione, perchè in questo caso G coincide con le traslazioni (quindi con R), e quindi, ad esempio, $d(1, 2) = d(-1, -2)$ ma nessun elemento di G manda 1 in -1 e 2 in -2.

Si verifica che è una distanza per il fatto che, se $\alpha = d(x, y)$, $\beta = d(y, z)$ e $\gamma = d(x, z)$ allora:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\theta$$

dove θ è l'angolo formato dagli archi che congiungono y a x e y a z.

Si può identificare G/K con S^n: infatti, se $R_1, R_2 \in SO(n+1)$, si ha che R_1 e R_2 individuano lo stesso laterale se e solo se $R_1^{-1}R_2(e_0) = e_0$, e dunque un laterale è univocamente determinato dall'immagine di e_0 su S^n.

Dunque, le funzioni bi-invarianti per K saranno le funzioni *zonali*, ovvero costanti sui paralleli (rispetto a e_0): sono quindi le funzioni che dipendono solo da $d(e_0, x)$.

L'azione di G è doppiamente trasitiva su G/K: se $d(x, y) = d(x', y')$, chiaramente esiste una rotazione che sovrappone le due coppie. Dunque $\mathbb{D}(G/K)$ è generata dall'operatore di Laplace-Beltrami. In questo caso si dimostra che tale operatore è il laplaciano sferico, e che le funzioni sferiche sono quindi le armoniche sferiche zonali che valgono 1 in e_0.

7.3 Piani iperbolici

Sia $G = SO_0(1, n)$ il gruppo di Lorentz, cioè la componente connessa dell'unità di $O(1, n)$: poichè $O(1, n)$ è il gruppo delle trasfomazioni di R^{n+1} che lasciano invariata la forma quadratica $\Phi(x_0, \ldots, x_n) = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2$, G può essere pensato come agente sull'iperboloide:

$$x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 = 1$$

Essendo poi $G \subseteq SO(1, n)$, G non inverte le falde, e dunque lo si può pensare come agente sulla falda contenente $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, che chiamo H^n (piano iperbolico).

Sia $K \leq G$ lo stabilizzatore di $\underline{e}_0 = (1, 0, \ldots, 0)$: si può identificare G/K con H^n, infatti, se $R_1, R_2 \in G$, si ha che R_1 e R_2 individuano lo stesso laterale se e solo se $R_1^{-1}R_2(e_0) = e_0$, e dunque un laterale è univocamente determinato dall'immagine di e_0 su H^n.

Introduco su H^n la distanza:

$$d(x, y) = r : \ \cosh r = x_0y_0 - x_1y_1 - \cdots - x_ny_n, \ r \geq 0$$

Si verifica che è una distanza per il fatto che, se $\alpha = d(x, y)$, $\beta = d(y, z)$ e $\gamma = d(x, z)$ allora:

$$\cosh\gamma = \cosh\alpha\cosh\beta - \sinh\alpha\sinh\beta\cos\theta$$

dove θ è l'angolo formato dagli archi che congiungono y a x e y a z.

Dunque, le funzioni bi-invarianti per K saranno le funzioni *zonali*, ovvero costanti sui paralleli (rispetto a e_0): sono quindi le funzioni che dipendono solo da $d(e_0, x)$.

L'azione di G è doppiamente trasitiva su G/K: se $d(x, y) = d(x', y')$, esiste una rotazione iperbolica che sovrappone le due coppie. Dunque $\mathbb{D}(G/K)$ è generata dall'operatore di Laplace-Beltrami. In questo caso si dimostra che tale operatore è:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

e quindi le funzioni sferiche sono quindi le autofunzioni di $\Box$ che valgono 1 in e_0.

7.4 Gruppo di Heisenberg

Definizione 7.1 Si dice *gruppo di Heisenberg di dimensione* $2n+1$ il gruppo $H_{2n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ dotato del prodotto:

$$(z_1, t_1)(z_2, t_2) = (z_1 + z_2, t_1 + t_2 + 2\Im < z_1, z_2 >)$$

Considero il gruppo $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ dotato del prodotto:

$$\big(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\big)\big(e^{i\eta_1}, \ldots, e^{i\eta_n}\big) = \big(e^{i(\theta_1+\eta_1)}, \ldots, e^{i(\theta_n+\eta_n)}\big)$$

Considero poi l'omomorfismo:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{T}^n &\to Aut(H_{2n+1}) \\ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) &\to \Big((z_1, \ldots, z_n, t) \to (\varepsilon_1 z_1, \ldots, \varepsilon_n z_n, t)\Big) \end{aligned}$$

Dimostro che $(\mathbb{T}^n \ltimes_\phi H_{2n+1}, \mathbb{T}^n)$ è una coppia di Gelfand. Per questo userò il seguente teorema:

Teorema 7.1 *Sia G un gruppo localmente compatto e K un sottogruppo compatto di G. Se esiste un automorfismo continuo θ di G tale che:*

- $\theta^2 = id$
- $\forall x \in G,\ x^{-1} \in K \cdot \theta(x) \cdot K$

allora (G, K) è una coppia di Gelfand.

Dimostrazione: Se $f \in C_C(G)^\natural$, definsco f^θ come:

$$f^\theta(x) = f\big(\theta(x)\big)$$

Considero l'applicazione:

$$f \to \int_G f^\theta(x)\,dx$$

Questo è un funzionale continuo su $C_C(G)$, dunque definisce una misura μ su G. In particolare:

$$\int_G f(yx)\,d\mu(x) = \int_G f\big(y\theta(x)\big)\,dx = \int_G f\big(\theta(x)\big)\,dx = \int_G f(x)\,d\mu(x)$$

dunque μ è multiplo della misura di Haar, quindi esiste $c > 0$ tale che $\int_G f^\theta(x)\,dx = c\int_G f(x)\,dx$. Ma $\theta^2 = id$, dunque $c^2 = 1$, ovvero $c = 1$, e quindi:

$$\int_G f\big(\theta(x)\big)\,dx = \int_G f(x)\,dx$$

Dunque:

$$\begin{aligned} f^\theta * g^\theta(x) &= \int_G f\big(\theta(y)\big)g\big(\theta(y)^{-1}\theta(x)\big)\,dx = \int_G f\big(y\big)g\big(y^{-1}\theta(x)\big)\,dx \\ &= f * g\big(\theta(x)\big) = (f*g)^\theta(x) \end{aligned}$$

e dunque $f^\theta * g^\theta = (f*g)^\theta$. Ma, essendo f bi-invariante per K ed essendo $x^{-1} \in K \cdot \theta(x) \cdot K$, si ha:

$$\int_G f(x^{-1})\,dx = \int_G f\big(\theta(x)\big)\,dx = \int_G f(x)\,dx$$

e dunque G è unimodulare. Allora, ponendo $f^\vee(x) = f(x^{-1})$, si ha $(f*g)^\vee = g^\vee * f^\vee$ (v. lemma 2.9, pag. 9). Ma, in questo caso, $f^\vee = f^\theta$, e dunque:

$$(f*g)^\theta = f^\theta * g^\theta = f^\vee * g^\vee = (g*f)^\vee = (g*f)^\theta$$

e dunque $f * g = g * f$. $\square$

Il prodotto in $G = \mathbb{T}^n \ltimes_\phi H_{2n+1}$ ha le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_1, z_1, t_1)(\varepsilon_2, z_2, t_2) = (\varepsilon_1\varepsilon_2,\ \varepsilon_2 z_1 + z_2,\ t_1 + t_2 + 2\Im < \varepsilon_2 z_1, z_2 >) \\ &1_G = (1, 0, 0) \\ &(\varepsilon, z, t)^{-1} = \big(\tfrac{1}{\varepsilon}, -\tfrac{z}{\varepsilon}, -t\big) \end{aligned}$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} (\tilde\varepsilon, 0, 0)(\varepsilon, z, t) &= (\tilde\varepsilon \cdot \varepsilon, z,\ t) \\ (\varepsilon, z, t)(\tilde\varepsilon, 0, 0) &= (\tilde\varepsilon \cdot \varepsilon, \tilde\varepsilon \cdot z,\ t) \end{aligned}$$

Dunque i laterali destri sono univocamente determinati da (z,t), mentre i laterali sinistri sono univocamente determinati da $\big(\frac{z}{\varepsilon}, t\big)$. I laterali doppi, invece, sono determinati da $(|z_1|, \ldots, |z_n|, t)$.

Considero l'automorfismo α dato da:

$$\alpha(\varepsilon, z, t) = (\varepsilon, \overline{z}, -t)$$

Chiaramente $\alpha^2 = id$ e, essendo $|z_i| = |\overline{z_i}|$, si ha che $(\varepsilon, z, t)^{-1} \in K \cdot \alpha(\varepsilon, z, t) \cdot K$. Quindi, per il teorema 7.1 si ha che $(\mathbb{T}^n \ltimes_\phi H_{2n+1}, \mathbb{T}^n)$ è una coppia di Gelfand.

Dalla caratterizzazione dei laterali doppi, si capisce che le funzioni bi-invarianti per K corrispondono alle funzioni su H_{2n+1} *multiradiali*, ovvero dipendenti solo da $(|z_1|, \dots, |z_n|, t)$.

Analizzo adesso l'azione di $Ad(\mathbb{T}^n)$ sull'algebra di Lie di G. Si ha che:

$$\begin{aligned}
&\Psi_{(\tilde{\varepsilon},0,0)}(\varepsilon, z, t) = \left(\tfrac{1}{\tilde{\varepsilon}}, 0, 0\right)(\varepsilon, z, t)(\tilde{\varepsilon}, 0, 0) = \left(\tfrac{1}{\tilde{\varepsilon}}, 0, 0\right)(\tilde{\varepsilon} \cdot \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \cdot z, t) = (\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \cdot z, t) \\
&d\Psi_{(\tilde{\varepsilon},0,0)}(X, Y, Z)_{1_G} = (X, \tilde{\varepsilon} Y, Z) \\
&\big[Ad(\tilde{\varepsilon}, 0, 0)\big](X, Y, Z)_{1_G} = (X, \tilde{\varepsilon} Y, Z)
\end{aligned}$$

Dunque, se $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{m}$ sono le algebre di Lie di G, $\mathbb{T}^n$ e H_{2n+1}, si ha che $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, con $\mathfrak{m}$ $Ad(\mathbb{T}^n)$-invariante. Inoltre, se $\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{r}$ sono gli spazi tangenti a $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{R}$ in 1_G, si ha che $\mathfrak{m} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{r}$ con $\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{r}$ $Ad(\mathbb{T}^n)$-invarianti. Inoltre, si vede chiaramente che l'usuale metrica su $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{R}$ è $Ad(\mathbb{T}^n)$-invariante, e che l'azione di $Ad(K)$ è transitiva sulla sfera unitaria di entrambe. Dunuqe, si ha che $I(\mathfrak{m} = I(\mathfrak{c}) \oplus I(\mathfrak{r})$, e che $I(\mathfrak{c})$ e $I(\mathfrak{r})$ sono generate da un solo operatore: siano D_1 e D_2 le immagini dei due generatori tramite ϕ: allora $\mathbb{D}(G/\mathbb{T}^n)$ ha due generatori, D_1 e D_2.

Bibliografia

[1] J. Faraut, *Analyse harmonique sur es paires de Guelfand et les espaces hyperboliques*

[2] S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Academic Press (1984)

[3] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press (1962)

[4] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience publishers (1962)

[5] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill (1991)

[6] G. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, CRC Press (1995)

[7] A. Koranyi, *Some applications of Gelfand Pairs in classical analysis*, Liguori Editore (1982)

[8] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*, Springer-Verlag (1991)

[9] F. John, *Plane waves and spherical means*, Wiley (Interscience), New York (1955)

[10] S. Lang, *Algebra*, Springer, New York (1993)